

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

АЛГЕБРА

9 класс



Москва
БАЛСС
2015

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
Р82

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Совет координаторов предметных линий Образовательной системы «Школа 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения по результатам научной экспертизы (заключение РАН от 14.10.2011 № 10106-5215/611), педагогической экспертизы (заключение РАН от 24.01.2014 № 000367) и общественной экспертизы (заключение НП «Лига образования» от 30.01.2014 № 174)

Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Рубин, А.Г.
Р82 **Алгебра. 9 кл.: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность / А.Г. Рубин, П.В. Чулков. – М. : Баласс, 2015. – 208 с.: ил. (Образовательная система «Школа 2100»).**

ISBN 978-5-85939-936-9

Учебник «Алгебра» для 9 класса соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть
скопированы без разрешения владельца авторских прав

ISBN 978-5-85939-936-9

© Рубин А. Г., Чулков П. В., 2012
© ООО «Баласс», 2012

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Перед вами учебник алгебры для 9-го класса, написанный Александром Григорьевичем Рубиным и Павлом Викторовичем Чулковым. Он входит в комплект учебников Образовательной системы «Школа 2100». Так же, как и другие учебники «Школы 2100», он поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

-   организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;
-   работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;
-   общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать.
-  Так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Зачем мы будем учиться!

Изучая алгебру в 9-м классе, вы познакомитесь с одной из самых важных в школьном курсе математики функций — квадратичной функцией, научитесь выполнять её исследование, строить график, решать многочисленные задачи, основанные на использовании квадратичной функции. Вы изучите свойства числовых неравенств и научитесь решать обширный класс неравенств с одним неизвестным — рациональные неравенства, а также их системы и совокупности. Вы изучите более глубоко, чем в предыдущих классах, системы уравнений с несколькими неизвестными, методы их решения, научитесь применять их при решении текстовых задач. Вы познакомитесь с числовыми последовательностями, разными способами их задания, после чего подробно изучите две важные последовательности — арифметическую и геометриче-

скую прогрессии, научитесь применять их при моделировании многих реальных ситуаций.

Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с перечисленными выше видами деятельности.

● Задания на развитие предметных умений в учебнике обозначены серым цветом.

Как мы будем учиться!

Для успешного изучения алгебры и овладения универсальными учебными действиями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Структура параграфа, где вводится новый материал, имеет в учебнике следующий вид.

Вспоминаем то, что знаем

Так обозначены вопросы, задания и упражнения по изученному материалу, который необходим для открытия нового знания.

Открываем новые знания

Ученики, проводя наблюдения, ищут решение и формулируют свои предположения о том, как решается данная задача, формулируют ответы на поставленные в учебнике вопросы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Ученики читают, анализируют текст учебника, сопоставляют его со своими предположениями, проверяют правильность своих ответов на вопросы и сделанных на их основании выводов.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н

Необходимый уровень. Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам определить, усвоены ли основные поня-

тия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят расширить свои знания. Они требуют более подробного и серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **выполнение всех заданий не является обязательным ни на одном из уровней.** Они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

В конце учебника приводятся ответы примерно к половине заданий.

В некоторых параграфах новый материал сообщается без использования проблемных ситуаций.

Повторяем, обобщаем знания

Так обозначены вопросы, задания и тексты по изученному и обобщаемому материалу.

Знакомимся с новыми знаниями

Ученики читают и анализируют текст учебника, делают выводы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения



Проблемный вопрос.



Это нужно запомнить.



Работа в группе (паре).



Задание с использованием информационных технологий.



Самостоятельная исследовательская работа.

Жизненные задачи и проекты

Помимо обычных учебных заданий разного уровня сложности, в учебник включены жизненные задачи и проекты. Ими можно заниматься в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Что такое жизненная задача?

Жизненная задача — это модель реальной ситуации, для разрешения которой необходим набор математических знаний, к этому моменту вам уже в основном известных. При этом жизненная задача отличается от привычных всем школьных учебных задач. Это отличие прежде всего заключается в том, что для её решения вам может понадобиться дополнительная информация, которую придётся добывать самим, причём какая именно информация нужна, вы должны решать сами и самостоятельно искать источники этой информации. В случае затруднений вы можете обратиться к старшим товарищам, учителю или другим взрослым.

В условии жизненной задачи могут содержаться избыточные данные. Ведь в жизни чаще всего так и бывает: когда пытаешься разобраться в ситуации и анализируешь, что тебе о ней известно, то постепенно выясняется, что далеко не вся эта информация пригодится, значительная её часть не имеет отношения к делу. Кроме того, для решения жизненной задачи будут необходимы знания не только из области математики, но и других изучаемых вами областей (как это и происходит в реальной жизни). Таким образом, систематическое решение жизненных задач даст вам возможность не только углубиться в математику, увидеть взаимосвязь математики и других областей знаний, но и совершенствовать в ходе анализа умение самостоятельно работать с информацией.

Жизненные задачи, как принято в учебниках Образовательной системы «Школа 2100», оформлены следующим образом:

СИТУАЦИЯ. Условия, в которых возникла проблема.

ВАША РОЛЬ. Человек, в роли которого вы должны себя представить, решая проблему.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Более подробная характеристика ситуации.

ЗАДАНИЕ. Что нужно сделать или что нужно получить в итоге.

Что такое проект?

Это любое самостоятельное дело, которое предполагает

- 1) оригинальный замысел (цель);
- 2) выполнение работы за определённый отрезок времени;
- 3) конкретный результат, представленный в итоге (мероприятие, решение проблемы, результат самостоятельных исследований и др.).

Проектная деятельность помогает научиться работать в команде, распределять роли таким образом, чтобы наиболее эффективно использовать силы

ные стороны каждого, участвовать в мозговых штурмах и других формах коллективной интеллектуальной деятельности, представлять результаты своего труда в форме доклада, презентации, инсценировки и т.д. Предполагается, что проекты будут выполняться в свободное от уроков время. Они не являются обязательными.

Структура учебника

Учебник разбит на главы, а каждая глава — на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки — номер главы, а число справа от точки — номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе — отдельные вопросы этой темы.

Задания на повторение пройденного материала не даются после каждого параграфа или главы, а собраны в конце учебника, после последней, четвёртой главы. Там приведено большое количество заданий для повторения, и это даст учителю возможность наиболее эффективно, исходя из особенностей класса, а также с учётом индивидуальной образовательной траектории каждого ученика организовать этот важнейший в обучении вид деятельности.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных математических задач, но и приобретёте важнейшее умение — учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.



Вспоминаем то, что знаем

- Какой вид имеет многочлен второй степени с одной переменной?
- Выделите полный квадрат (квадрат двучлена) в многочленах:
а) $x^2 - 4x - 9$; б) $-2x^2 - 4x + 3$.
- Расскажите, как выделить полный квадрат в многочлене второй степени с одной переменной. Выделите полный квадрат в многочлене $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.
- Расскажите, при каком условии многочлен второй степени с одной переменной можно разложить на линейные множители.
- Разложите на линейные множители многочлены:
а) $x^2 - 2x - 15$; б) $-2x^2 - 5x + 7$.

Повторяем, обобщаем знания

Рассмотрим многочлен второй степени с переменной x . Его общий вид следующий: $ax^2 + bx + c$, причём $a \neq 0$. Коэффициентами этого многочлена являются числа a , b и c .

Коэффициент a называется *старшим коэффициентом* (поскольку он стоит при старшей, то есть самой высокой, степени переменной). Коэффициент c называется *свободным членом*. Что касается коэффициента b , то у него нет общепринятого названия, чаще всего его называют вторым коэффициентом или попросту коэффициентом при x . В отличие от старшего коэффициента, b и c могут по отдельности или оба вместе равняться нулю.

Поскольку другое название второй степени — квадрат, то самое распространённое название многочлена $ax^2 + bx + c$ — *квадратный трёхчлен*. Это название сохраняется даже для случаев равенства нулю коэффициентов b или c , хотя, строго говоря, выражения вроде $-x^2 + 6x$ или $3x^2 - 5$ было бы правильнее называть квадратными двучленами, а выражение вроде $7x^2$ — и вовсе квадратным одночленом.

В таблице представлены примеры квадратных трёхчленов с переменной x .

Квадратный трёхчлен	Коэффициенты
$x^2 + 4x$	$a = 1, b = 4, c = 0$
$-x^2 + 9$	$a = -1, b = 0, c = 9$
$2x^2 - 4x + 2$	$a = 2, b = -4, c = 2$
$-4x^2 - x + 3$	$a = -4, b = -1, c = 3$

Квадратный трёхчлен, старший коэффициент которого равен единице, называется *приведённым*. Из четырёх квадратных трёхчленов, записанных в таблице, приведённым является только первый.

На уроках алгебры в 7-м и 8-м классах вы уже работали с квадратным трёхчленом и научились решать несколько связанных с ним важных задач. Вспомним это подробнее.

В 7-м классе вы научились выполнять тождественное преобразование квадратного трёхчлена, называемое выделением полного квадрата, или, по-другому, выделением квадрата двучлена.

Если квадратный трёхчлен приведённый, то входящий в него одночлен первой степени записывают в виде удвоенного произведения переменной x на половину коэффициента этого одночлена, после чего прибавляют и вычитают квадрат этой половины. Скажем, для приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + 6x + 14$ это преобразование выглядит так:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 14 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 14 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 14 = \\ &= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 14 = (x + 3)^2 - 9 + 14 = (x + 3)^2 + 5. \end{aligned}$$

Для произвольного квадратного трёхчлена проще всего вынести за скобки старший коэффициент, затем выполнить в скобках выделение полного квадрата для приведённого квадратного трёхчлена, как сделано выше, после чего раскрыть скобки. При решении задач это удобнее делать для каждого конкретного квадратного трёхчлена, хотя можно выполнить и в общем виде, для трёхчлена $ax^2 + bx + c$, что и было сделано на уроках алгебры в 8-м классе при выводе формулы корней квадратного уравнения. Собственно говоря, левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ как раз и представляет собой квадратный трёхчлен.

Давайте вспомним, как производилось выделение полного квадрата:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}. \end{aligned}$$

Числитель образовавшейся дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, как вы знаете, имеет специальное название — *дискриминант* и специальное общепринятое обозначение буквой D . В 8-м классе вы называли его дискриминантом квадратного уравнения, но его также называют *дискриминантом квадратного трёхчлена*. Кстати, корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если они существуют) называют также корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, стоящего в левой части этого уравнения.

Скажем, у квадратного трёхчлена $2x^2 + 7x + 3$ коэффициенты равны: $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$, а его дискриминант равен:

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 = 5^2.$$

Таким образом, корни этого квадратного трёхчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 5}{2 \cdot 2}, \text{ то есть } x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

И, наконец, ещё одно преобразование, которое вы научились выполнять на уроках алгебры в 8-м классе, — это разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.

Если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, x_1 и x_2 — его корни, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Скажем, у рассмотренного выше квадратного трёхчлена $2x^2 + 7x + 3$ корни равны -3 и $-\frac{1}{2}$, следовательно: $2x^2 + 7x + 3 = 2(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Иногда полезно (хотя и не всегда) перемножить числовой множитель с той скобкой, в которой стоит дробь:

$$2x^2 + 7x + 3 = 2(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 3)(2x + 1).$$

Если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю и x_1 — его корень, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Поскольку при $D = 0$ $x_1 = -\frac{b}{2a}$, то эту формулу можно переписать также в виде $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

В конкретных ситуациях иногда проще в случае $D = 0$ попытаться увидеть в преобразуемом квадратном трёхчлене квадрат суммы или разности, чем применять записанные выше формулы. Если старший коэффициент является полным квадратом, то квадрат суммы или разности получается сразу, а если нет, то после вынесения старшего коэффициента за скобки.

Например, у квадратного трёхчлена $4x^2 + 12x + 9$ дискриминант равен $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, старший коэффициент $4 = 2^2$, и тогда сразу пишем: $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$.

Наконец, при отрицательном дискриминанте квадратный трёхчлен не раскладывается на линейные множители.

Развиваем умения



Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что называется дискриминантом квадратного трёхчлена?
б) Что называется корнями квадратного трёхчлена?

2 Вычислите дискриминант квадратного трёхчлена:

- а) $x^2 - 4x - 9$; д) $-2x^2 + x - 4$;
б) $-x^2 + x - 1$; е) $2x^2 - 4x + 2$;
в) $x^2 + 2x + 27$; ж) $11x^2 - x - 1$;
г) $-x^2 - 7x - 1$; з) $5x^2 - 2x + 1$.

3 Какие из следующих квадратных трёхчленов имеют корни? Сколько?

- а) $3x^2 + x - 2$; в) $10x^2 - 2x + 1$;
б) $x^2 + 26x + 170$; г) $x^2 - 2x - 6$.

4 Выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена:

- а) $x^2 - 6x + 10$; д) $4x^2 + 16x + 11$;
б) $x^2 + x + 1$; е) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 13$;
в) $x^2 + 4x + 21$; ж) $36x^2 + 72x + 42$;
г) $x^2 - 14x$; з) $9x^2 + 12x - 28$.

Н

5 Выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена:

- а) $\frac{81}{20}x^2 + \frac{45}{8}x + \frac{61}{64}$; д) $\frac{1}{250}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{3}{8}$;
б) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{188}{25}$; е) $-\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{3}x - 14$;
в) $-\frac{243}{32}x^2 + \frac{9x}{2} - \frac{23}{3}$; ж) $\frac{20}{49}x^2 + \frac{80}{63}x + \frac{323}{81}$;
г) $125x^2 - 25x - \frac{7}{4}$; з) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{20}{9}x - \frac{443}{81}$.

6 Разложите квадратный трёхчлен на множители:

- а) $x^2 + 5x - 6$; д) $x^2 - 3x - 40$;
б) $x^2 + 3x - 40$; е) $x^2 + 9x - 10$;
в) $x^2 - 8x + 16$; ж) $x^2 - 10x$;
г) $x^2 + 15x + 56$; з) $x^2 + 2x - 15$.

7 Разложите квадратный трёхчлен на множители:

- а) $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{4}$; д) $x^2 - \frac{5x}{2} + 1$;
б) $x^2 - \frac{7}{12}x - 1$; е) $x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}$;
в) $x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{4}{5}$; ж) $x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{5}{12}$;
г) $x^2 + \frac{2}{3}x$; з) $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$.

8 Представьте квадратный трёхчлен в виде произведения:

- а) $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 3$; д) $\frac{20}{3}x^2 + \frac{25}{9}x - \frac{10}{9}$;
б) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{1}{2}$; е) $\frac{9}{14}x^2 - \frac{107}{70}x + \frac{4}{5}$;
в) $2x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}$; ж) $-\frac{16}{45}x^2 + \frac{224}{45}x - \frac{12}{5}$;
г) $-5x^2 + \frac{97}{24}x + \frac{7}{24}$; з) $\frac{9}{40}x^2 + \frac{13}{840}x - 1$.

9 Найдите корни квадратного трёхчлена, разложив его на множители с помощью выделения полного квадрата:

- а) $3x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{5}{4}$; в) $\frac{9}{2}x^2 + \frac{65}{16}x - \frac{7}{16}$;
б) $\frac{5}{27}x^2 + \frac{44}{9}x - 20$; г) $3x^2 + 6x - \frac{7}{3}$.

10 Разложите квадратный трёхчлен на множители, найдя его корни с помощью дискриминанта:

- а) $x^2 - 7x + 12$; в) $x^2 - 12x + 27$;
б) $x^2 - 3x - 10$; г) $x^2 - 16x + 60$;

$$\text{д)} 3x^2 + \frac{7}{9}x + \frac{4}{81}; \quad \text{ж)} -4x^2 + 11x + 20;$$

$$\text{е)} -x^2 + \frac{29}{24}x + \frac{5}{4}; \quad \text{з)} 27x^2 - 18x - 24.$$

11 Найдите корни квадратного трёхчлена:

$$\text{а)} x^2 + 7x - 5; \quad \text{в)} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{3};$$

$$\text{б)} 3x^2 + 8x - 8; \quad \text{г)} \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{8}{9}.$$

12 Имеет ли корни квадратный трёхчлен:

$$\text{а)} \frac{6}{5}x^2 + x + \frac{5}{2}; \quad \text{в)} 7x^2 - 10x + 7;$$

$$\text{б)} -\frac{9x^2}{7} - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}; \quad \text{г)} -\frac{5x^2}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{5}{9}?$$

13 Сократите дробь:

$$\text{а)} \frac{10 - 55x - 30x^2}{8 - 46x - 12x^2}; \quad \text{д)} \frac{7 + 54x - 81x^2}{-5 - 37x + 72x^2};$$

$$\text{б)} \frac{5 + 20x^2 - 25x}{8 + 4x^2 - 33x}; \quad \text{е)} \frac{28x^2 - 90x + 50}{50 - 35x - 49x^2};$$

$$\text{в)} \frac{9x^2 + 19x - 24}{36x^2 - 59x + 24}; \quad \text{ж)} \frac{15 - 22x - 5x^2}{40 + 43x + 7x^2};$$

$$\text{г)} \frac{42x^2 + 3x - 90}{54 + 90x + 36x^2}; \quad \text{з)} \frac{8x^2 - 20x - 48}{6x^2 - 20x - 16}.$$

П

14 Сократите дробь:

$$\text{а)} \frac{48a^2 - 24av - 24v^2}{80a^2 + 96av + 28v^2}; \quad \text{д)} \frac{2a^2 + ar - r^2}{-10a^2 - 19ar - 9r^2};$$

$$\text{б)} \frac{-63c^2 + 76ct + 20t^2}{-49c^2 + 77ct - 10t^2}; \quad \text{е)} \frac{-30u^2 - 68ux - 30x^2}{-48u^2 - 116ux - 60x^2};$$

$$\text{в)} \frac{-6g^2 + gl + 12l^2}{8g^2 - 18l^2}; \quad \text{ж)} \frac{48g^2 - 112gs + 64s^2}{8g^2 + 16gs - 24s^2};$$

$$\text{г)} \frac{64j^2 - 56jy + 12y^2}{-32j^2 + 68jy - 21y^2}; \quad \text{з)} \frac{-28c^2 + 59cg + 9g^2}{-4c^2 - 3cg + 27g^2}.$$

- 15 Найдите корни квадратного трёхчлена, разложив его на множители:

а) $2\sqrt{2}x^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)x + \frac{5\sqrt{13}}{12}$;

в) $x^2 - (2 - \sqrt{7})x - 2\sqrt{7}$;

б) $8x^2 + (2\sqrt{7} + 4\sqrt{42})x + 7\sqrt{6}$;

г) $6\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{10} + 3\sqrt{11})x + 2\sqrt{55}$.

- 16 При каких значениях u квадратный трёхчлен $15x^2 + ux - 2u^2$ имеет два различных корня?

- 17 При каких значениях переменной v квадратный трёхчлен $v^2x^2 - vx + v + \frac{1}{4}$ имеет корни? Найдите эти корни.

- 18 Найдите для квадратного трёхчлена $238x^2 + 442x - 91$ значения следующих выражений, зависящих от его корней x_1 и x_2 :

а) $x_1 + x_2$; д) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

б) $x_1 \cdot x_2$; е) $\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$;

в) $x_1^2 + x_2^2$; ж) $x_1^3x_2^2 - x_1x_2^3 + x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2 - 2x_1^2x_2^2$;

г) $x_1^3 + x_2^3$; з) $-6 - x_1 + x_1^2 - x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

- 19 Известно, что числа 113; 180; 261 являются значениями некоторого квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ при $x = 5$; 6; 7 соответственно. Найдите коэффициенты a , b и c , после чего запишите три значения этого квадратного трёхчлена при $x = 8$; 9; 10.

- 20 Имеет ли корни квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), если его наименьшее значение больше нуля? Меньше нуля? Равно нулю? Найдите его минимальное значение и значение переменной x , при котором оно достигается.

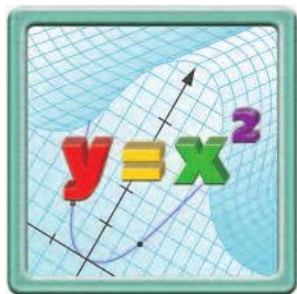
- 21 Изобразите графики функций $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ и $y = x - 1$. В чём их отличие?

М

- 22 Изобразите графики функций $y = \frac{x^3 - 4x^2 - 17x + 60}{x^2 - 8x + 15}$ и $y = x + 4$. В чём их отличие?

- 23 Известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 . Выразите через коэффициенты этого трёхчлена значение выражения:

$$\frac{bx_1x_2 + a^2x_1^3x_2 - ax_1x_2 + bx_2^2 - ax_1^2 + a^2x_1^2x_2^2 - abx_1^2x_2^2 - abx_1x_2^3}{bx_1x_2^2 + a^2x_1^3x_2^2 - ax_1^2x_2 - abx_1^2x_2^3}.$$



Вспоминаем то, что знаем

- Какова естественная область определения функции $y = x^2$?
 - Для каких значений аргумента функция $y = x^2$ является возрастающей, а для каких — убывающей?
 - Какие функции называются чётными?
 - Является ли функция $y = x^2$ чётной? Обоснуйте свой ответ.
- Постройте график функции $y = x^2$.
- Как называется линия, являющаяся графиком функции $y = x^2$?

Открываем новые знания

- Какова естественная область определения функции $y = ax^2$ (где a — любое действительное число, отличное от нуля)?
- Для каких значений аргумента функция $y = ax^2$ является возрастающей, а для каких — убывающей? Как ответ на этот вопрос зависит от числа a ?
- Является ли функция $y = ax^2$ чётной? Как ответ на этот вопрос зависит от числа a ?
- Постройте график функции $y = ax^2$. Возьмите для начала $a = 2$, $a = -2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$. Какие закономерности вы заметили?



Какие свойства имеет функция $y = ax^2$?
Как построить график функции $y = ax^2$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

На уроках алгебры в 8-м классе вы познакомились с функцией $y = x^2$ и научились строить её график.

Напомним, что естественной областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Функция принимает только неотрицательные значения, то есть $y(x) \geq 0$ при всех действительных x . При этом $y = 0$ лишь в том случае, когда $x = 0$.

Для положительных значений аргумента функция $y = x^2$ является возрастающей, а для отрицательных значений аргумента — убывающей.

Функция $y = x^2$ является чётной. Это значит, что при противоположных значениях аргумента значения функции одинаковы.

Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Осью симметрии параболы служит ось ординат. Начало координат, точка $(0; 0)$ является вершиной параболы. Вершина делит параболу на две части, называемые ветвями параболы.

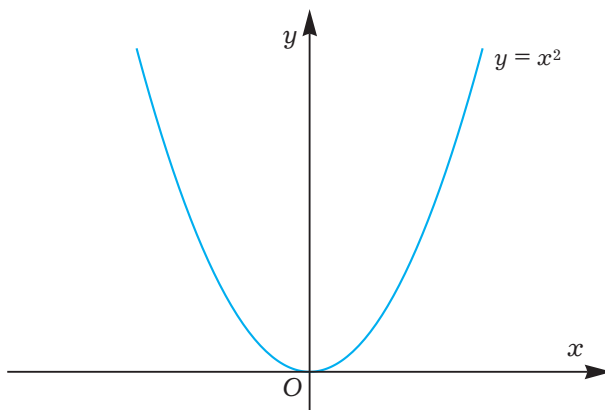


Рис. 1

В данном параграфе мы будем заниматься функцией $y = ax^2$, где a — любое действительное число, отличное от нуля. Возьмём, например, $a = 2$ и рассмотрим функцию $y = 2x^2$. Естественной областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Поскольку квадрат никакого действительного числа не может быть отрицательным, $y \geq 0$ при всех действительных x . При этом $y = 0$ лишь в том случае, когда $x = 0$.

Сразу бросается в глаза, что эти свойства функции $y = 2x^2$ очень похожи на свойства функции $y = x^2$.

Важным свойством функции $y = x^2$ является её чётность, то есть равенство значений функции при противоположных значениях аргумента.

Проверим, что функция $y(x) = 2x^2$ тоже является чётной. Для этого найдём $y(-x)$ и сравним его с $y(x)$. Имеем: $y(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = y(x)$, а это и значит, что функция $y(x) = 2x^2$ является чётной.

Для построения графика функции $y = 2x^2$ возьмём несколько положительных значений аргумента и найдём соответствующие им значения функции.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,5	2	4,5	8

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость, а также нанесём точки, симметричные уже нанесённым точкам относительно оси ординат (рис. 2). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = 2x^2$ (рис. 3).

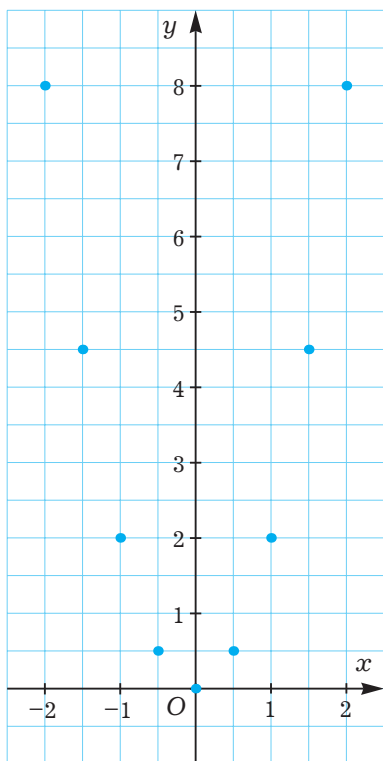


Рис. 2

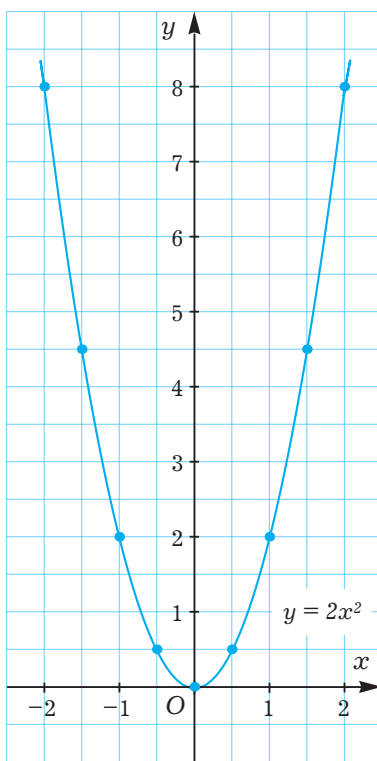


Рис. 3

Ясно, что мы нарисовали лишь часть графика — поскольку область определения нашей функции состоит из всех действительных чисел (вся ось абсцисс), то весь график на листе бумаги нарисовать невозможно. Точно так же мы поступали ранее, рисуя график функции $y = x^2$ и ряд других графиков.

При каждом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ в два раза больше соответственного значения функции $y = x^2$. Геометрически это значит, что если взять на графиках точки с одинаковыми абсциссами, то ордината точки, лежащей на графике $y = 2x^2$, будет в 2 раза больше, чем ордината точки, лежащей на графике $y = x^2$. Вы знаете, что точки с одинаковыми абсциссами лежат на прямой, параллельной оси Oy . Таким образом, если на графике $y = x^2$ взять любую точку с ненулевой абсциссой и переместить её параллельно оси Oy так, чтобы ордината этой точки увеличилась в 2 раза, то получим точку, лежащую на графике функции $y = 2x^2$. Ясно, что любая точка графика функции $y = 2x^2$ может быть получена с помощью такого перемещения некоторой точки графика функции $y = x^2$. Можно сказать, что график функции $y = 2x^2$ может быть получен из графика функции $y = x^2$ растяжением последнего в 2 раза вдоль оси Oy . Говорят также «растяжением

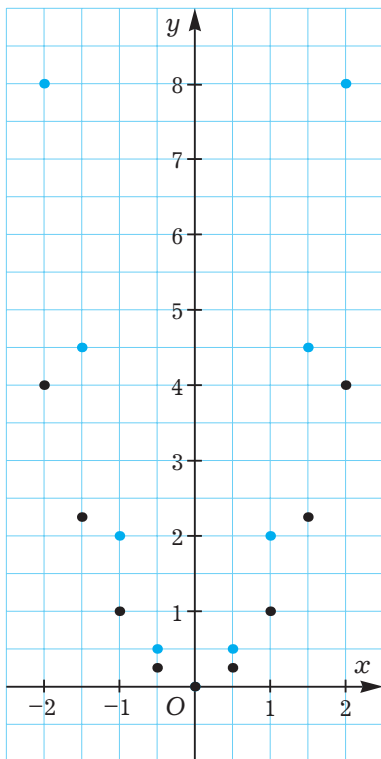


Рис. 4

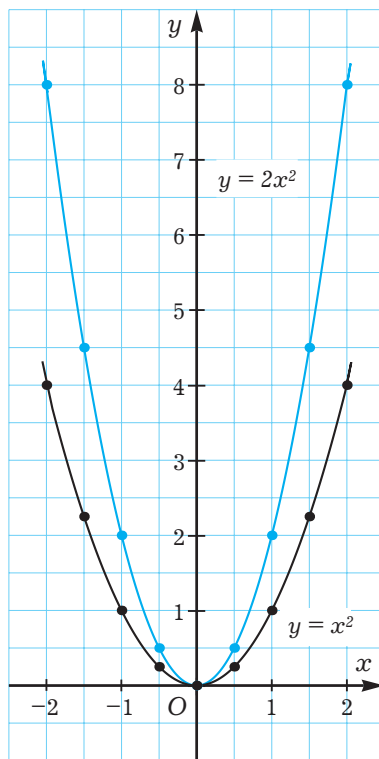


Рис. 5

графика функции $y = x^2$ в 2 раза от оси Ox », поскольку расстояние каждой точки до оси Ox увеличивается в 2 раза.

Теперь в формуле $y = ax^2$ возьмём $a = \frac{1}{2}$ и рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}x^2$. Так же, как и у функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$, естественной областью определения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ является множество всех действительных чисел. Так же $y \geq 0$ при всех действительных x , причём $y = 0$ лишь при $x = 0$.

Функция $y(x) = \frac{1}{2}x^2$ является чётной, так как $\frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2$, а значит, её график симметричен относительно оси ординат.

Для построения этого графика возьмём несколько положительных значений аргумента и найдём соответствующие значения функции.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,125	0,5	1,125	2	3,125	4,5

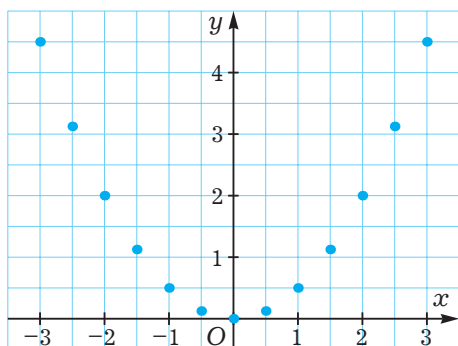


Рис. 6

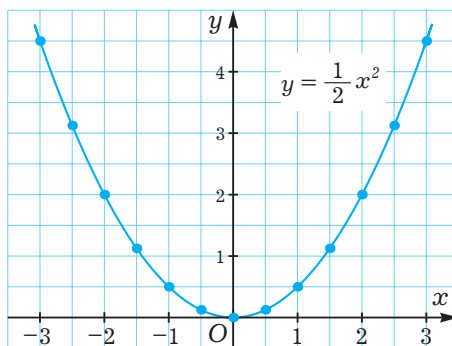


Рис. 7

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость, а также нанесём точки, симметричные уже нанесённым точкам относительно оси ординат (рис. 6). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 7).

При каждом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в 2 раза меньше соответственного значения функции $y = x^2$. Геометрически это значит, что если взять на графиках точки с одинаковыми абсциссами, то ордината точки, лежащей на графике $y = \frac{1}{2}x^2$, будет в 2 раза меньше, чем ордината точки, лежащей на графике $y = x^2$. А поскольку точки с одинаковыми абсциссами лежат на прямой, параллельной оси Oy , то если взять на графике $y = x^2$ любую точку с ненулевой абсциссой и переместить её параллельно оси Oy так, чтобы ордината этой точки уменьшилась в 2 раза, то получим точку, лежащую на графике функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Ясно, что любая точка графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ может быть получена с помощью такого перемещения некоторой точки графика функции $y = x^2$. Можно сказать, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика функции $y = x^2$ сжатием последнего в 2 раза вдоль оси Oy . Говорят также «сжатием графика функции $y = x^2$ в 2 раза к оси Ox », поскольку расстояние каждой точки до оси Ox уменьшается в 2 раза.

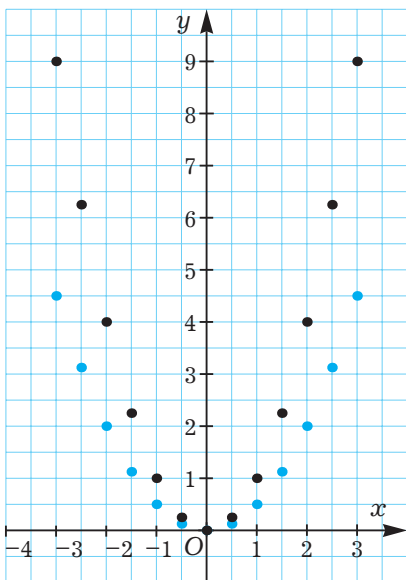


Рис. 8

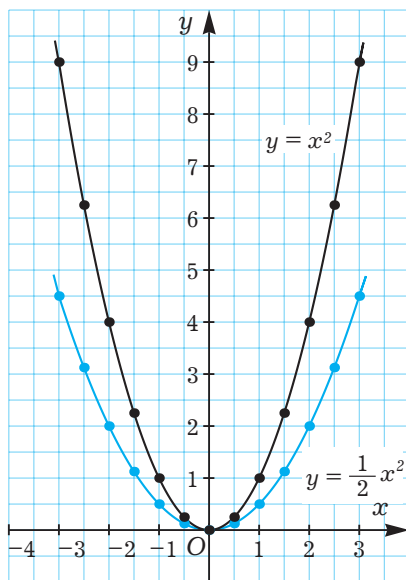


Рис. 9

Можно сформулировать следующее правило.

График функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ растяжением вдоль оси Oy в a раз при $a > 1$ и сжатием вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$.

Теперь рассмотрим функцию $y = ax^2$ при отрицательных a . В последнем из построенных нами графиков $y = \frac{1}{2}x^2$ было $a = \frac{1}{2}$, а теперь возьмём, например, $a = -\frac{1}{2}$ и построим график $y = -\frac{1}{2}x^2$. Естественной областью определения функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ является множество всех действительных чисел. При всех действительных x значения функции неположительны, то есть $y \leq 0$, причём $y = 0$ лишь при $x = 0$.

Функция $y = -\frac{1}{2}x^2$ является чётной, поскольку $-\frac{1}{2}(-x)^2 = -\frac{1}{2}x^2$, значит, её график симметричен относительно оси ординат.

Для построения графика $y = -\frac{1}{2}x^2$ возьмём несколько положительных значений аргумента и найдём соответствующие значения функции.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	-0,125	-0,5	-1,125	-2	-3,125	-4,5

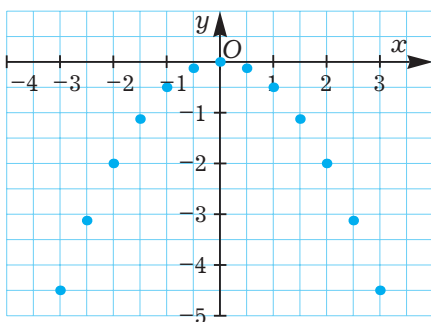


Рис. 10

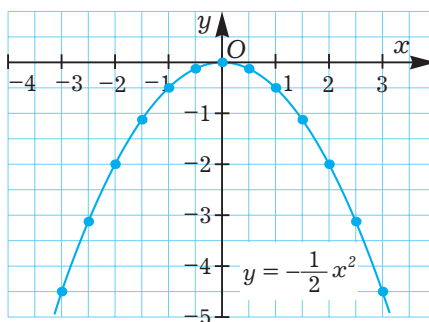


Рис. 11

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость, а также нанесём точки, симметричные уже нанесённым точкам относительно оси ординат (рис. 10). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ (рис. 11). При каждом x значения функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ являются противоположными числами. А поскольку точки с одинаковыми абсциссами, но противоположными ординатами симметричны относительно оси Ox , это значит, что график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью симметрии (иногда говорят также «зеркального отражения») относительно оси абсцисс.

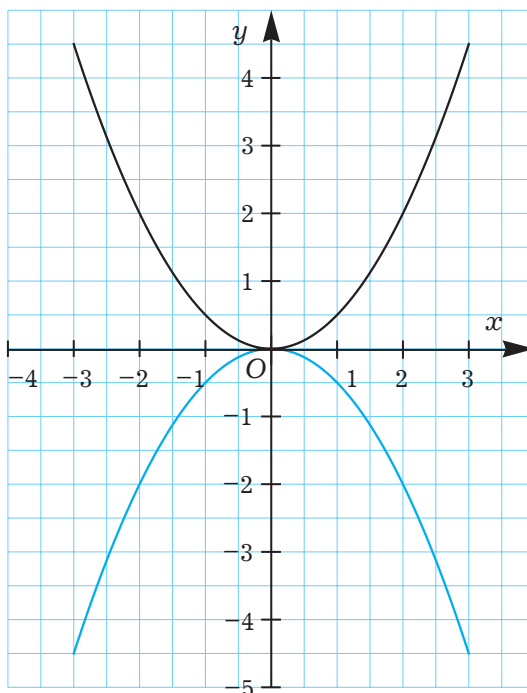


Рис. 12

Можно сформулировать общее правило.

Графики функций $y = -ax^2$ и $y = ax^2$ при $a \neq 0$ симметричны относительно оси абсцисс.

Таким образом, мы научились строить график функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$. Этот график, так же, как и знакомый вам из 8-го класса график функции $y = x^2$, называется параболой. Осью симметрии параболы $y = ax^2$ является ось ординат, а её вершиной является начало координат, точка $(0; 0)$. При $a > 0$ ветви этой параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Парабола имеет много интересных геометрических свойств, о которых мы поговорим позднее.

В заключение параграфа перечислим основные свойства функции $y = ax^2$ отдельно при $a > 0$ и отдельно при $a < 0$.

Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

- 1) Область определения — множество всех действительных x .
- 2) $y \geq 0$ при всех действительных x .
- 3) Функция является чётной. Это значит, что при противоположных значениях аргумента значения функции одинаковы, а график функции симметричен относительно оси ординат.
- 4) Для положительных значений аргумента функция является возрастающей, а для отрицательных значений аргумента — убывающей.
- 5) Функция имеет наименьшее значение и не имеет наибольшего. Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при $x = 0$.
- 6) Графиком функции является парабола с вершиной $(0; 0)$ и осью симметрии Oy , ветви которой направлены вверх.

Свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

- 1) Область определения — множество всех действительных x .
- 2) $y \leq 0$ при всех действительных x .
- 3) Функция является чётной. Это значит, что при противоположных значениях аргумента значения функции одинаковы, а график функции симметричен относительно оси ординат.
- 4) Для положительных значений аргумента функция является убывающей, а для отрицательных значений аргумента — возрастающей.
- 5) Функция имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего. Наибольшее значение функции равно 0 и достигается при $x = 0$.
- 6) Графиком функции является парабола с вершиной $(0; 0)$ и осью симметрии Oy , ветви которой направлены вниз.

И наконец, обратите внимание, что в процессе построения графиков функций $y = ax^2$ при различных значениях числа $a \neq 0$ мы открыли правила, которые можно применять при построении многих других графиков.

График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси Ox (параллельно оси Oy) в a раз при $a > 1$ и сжатием к оси Ox (параллельно оси Oy) в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$.

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Ox .

Мы ещё не раз будем применять в дальнейшем эти правила при построении разных графиков. Некоторые такие графики вы сможете построить, выполняя задания к данному параграфу.

Развиваем умения



Н

- 1 Закончите предложения.
а) Областью определения функции $y = ax^2$ является ...
б) При $a > 0$ все значения функции $y = ax^2$ являются ...
в) При $a < 0$ все значения функции $y = ax^2$ являются ...
г) Графиком функции $y = ax^2$ при $a \neq 0$ является ...
- 2 При каких значениях аргумента функция $y = ax^2$ является:
а) возрастающей? б) убывающей?
Как ответ на эти вопросы зависит от значения $a \neq 0$?
- 3 а) Что такое ветви параболы?
 б) Как направлены ветви параболы $y = ax^2$ при различных $a \neq 0$?
- 4 а) Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2$?
 б) Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
Как ответ на эти вопросы зависит от значения a ?
- 5 В каких четвертях расположена парабола $y = ax^2$, если:
а) $a > 0$; б) $a < 0$?
- 6 Найдите значения функции $y = 1,5x^2$ при указанных значениях аргумента:
а) 14; в) -15; д) 11; ж) 9;
б) -8; г) 15; е) 12; з) -17.
- 7 Найдите значения функции $y = \frac{2}{3}x^2$ при указанных значениях аргумента:
а) 3; в) 0,1; д) 0,9; ж) 4,5;
б) -6; г) 1,2; е) 10; з) -3,6.

8 Какие из точек принадлежат графику функции $y = -3x^2$:

- а) $(-2; 6)$; в) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; д) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$; ж) $(-0,1; -0,03)$;
б) $(-1; -3)$; г) $(-1; 3)$; е) $(-3; -9)$; з) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$?

9 Найдите a , если известно, что указанная точка принадлежит графику функции $y = ax^2$:

- а) $(-1; -4)$; в) $(0; 0)$; д) $(5; -35)$; ж) $(5; 0)$;
б) $(3; 45)$; г) $(-6; -12)$; е) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{40}\right)$; з) $(-0,3; 0,21)$.

Н

10 Дана функция $y = 0,4x^2$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

- а) $u = 2,1$; $v = 2,3$; в) $u = 7,23$; $v = 7,231$;
б) $u = 0,1$; $v = 0,001$; г) $u = 11,2435739$; $v = 11,2436739$.

11 Дана функция $y = 0,4x^2$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

- а) $u = -2,7$; $v = -2,8$; в) $u = -0,1$; $v = -0,09$;
б) $u = -10,12$; $v = -10,1$; г) $u = -4,4$; $v = -4,9$.

12 Дана функция $y = -12,5x^2$. Сравните $y(u)$ и $y(v)$, если:

- а) $u = -0,5$; $v = -0,9$; в) $u = -10$; $v = -9,99$;
б) $u = 3,3333$; $v = 3,333$; г) $u = 5647,34$; $v = 5647,35$.

13 Постройте график функции:

- а) $y(x) = \frac{5}{4}x^2$; д) $y(x) = \frac{1}{3}x^2$;
б) $y(x) = 3x^2$; е) $y(x) = \frac{3}{10}x^2$;
в) $y(x) = -\frac{3}{2}x^2$; ж) $y(x) = -\frac{1}{7}x^2$;
г) $y(x) = -\frac{4}{9}x^2$; з) $y(x) = -\frac{7}{4}x^2$.

- 14** Заполните таблицу отсутствующими значениями функций $y = \frac{7}{8}x^2$ и $y = -2,5x^2$, зная значения функции $y = x^2$.

x	11	20	$-\frac{9}{7}$	$\frac{19}{22}$	$-9\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{33}$
x^2	121	400	$\frac{81}{49}$	$\frac{361}{484}$	$\frac{1521}{16}$	$\frac{4}{1089}$
$\frac{7}{8}x^2$						
$-2,5x^2$						

- 15** Даны функции $f(x) = 7x^2$ и $g(x) = 8x^2$. Сравните $f(u)$ и $g(u)$, где u — произвольное действительное число.
- 16** Даны функции $f(x) = ax^2$ и $g(x) = bx^2$. Сравните $f(u)$ и $g(u)$, где u — произвольное действительное число и:
- а) $a > b > 0$; в) $a > 0$; $b < 0$; д) $b > a > 0$;
б) $0 > a > b$; г) $a < 0$; $b > 0$; е) $0 > b > a$.

П

- 17** Вы знаете, как сравнивать значения $y(u)$ и $y(v)$ функции $y(x) = ax^2$ для разных $a \neq 0$, если u и v — числа одного знака. А как сравнить $y(u)$ и $y(v)$, если u и v — числа разного знака?

М

- 18** Даны графики четырёх функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ и $y = w(x)$ (рис. 13). Постройте графики функций:
- а) $y = -f(x)$; б) $y = 2g(x)$; в) $y = -\frac{2}{3}h(x)$; г) $y = \frac{1}{2}w(x)$.
- 19** Постройте график функции:
- а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = 2\sqrt{x}$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{3}$; г) $y = -\frac{\sqrt{x}}{3}$.

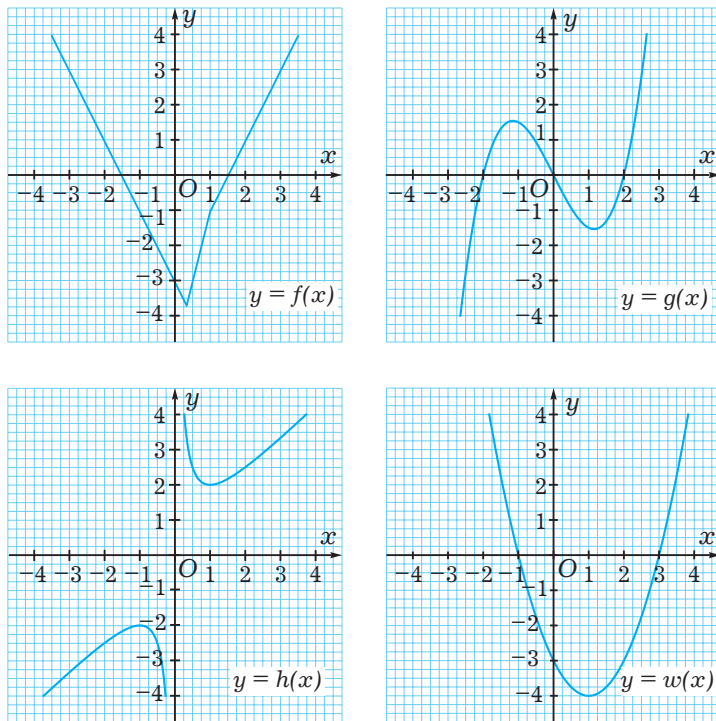


Рис. 13

1.3

Функция $y = a(x+h)^2 + l$ и её график



Знакомимся с новыми знаниями

Квадратичной функцией называется функция, задаваемая формулой $y(x) = ax^2 + bx + c$. Здесь x — независимая переменная, a , b и c — действительные числа, причём $a \neq 0$. Вы уже наверняка обратили внимание, что выражение, стоящее справа от знака равенства в формуле, задающей квадратичную функцию, является квадратным трёхчленом.

Сразу ясно, что областью определения квадратичной функции служит множество всех действительных чисел. Что касается остальных свойств квадратичной функции, то проще всего их установить, научившись строить график этой функции.

Прежде всего, выполним выделение полного квадрата. Мы это уже делали в параграфе 1.1, так что сейчас, воспользовавшись полученной там формулой, перепишем квадратичную функцию в виде:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Временно обозначим для простоты $h = -\frac{b}{2a}$; $l = -\frac{D}{4a}$. Формула, задающая квадратичную функцию, примет вид:

$$y = a(x + h)^2 + l.$$

Для начала поработаем с этой формулой, когда одно из чисел h или l равно нулю.

Начнём со случая, когда $h = 0$, то есть с формулы $y = ax^2 + l$. Возьмём конкретные числовые значения a и l , скажем $a = \frac{1}{2}$, $l = 4$, и построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$.

Для построения этого графика возьмём несколько значений аргумента и найдём соответствующие значения функции.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	8,5	6	4,5	4	4,5	6	8,5	12

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость (рис. 14). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ (рис. 15).

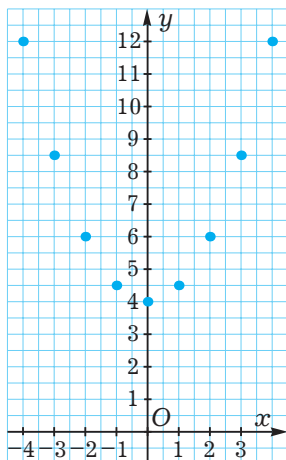


Рис. 14

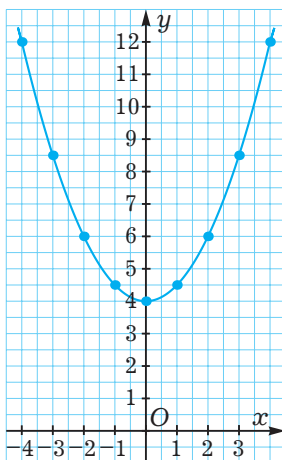


Рис. 15

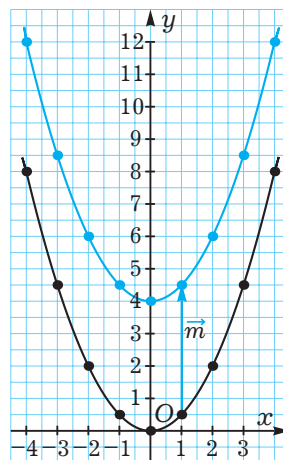


Рис. 16

Изобразим в одной координатной плоскости график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$, построенный нами сейчас (синего цвета), и график функции $y = \frac{1}{2}x^2$, построенный в предыдущем параграфе (чёрного цвета), причём с отмеченными при их построении точками. Из рис. 16 хорошо видно, что на 4 единицы выше каждой чёрной точки лежит синяя точка. Вообще, если взять на графиках точки с одинаковыми абсциссами, то точка графика $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ (синего цвета) будет расположена на 4 единицы выше, чем соответственная точка графика $y = \frac{1}{2}x^2$ (чёрного цвета), так как её ордината на 4 больше. Можно сказать, что график $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ получен из графика $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом (или *параллельным переносом*) вдоль оси Oy на 4 единицы *вверх*. На векторном языке это звучит так: график получен параллельным переносом на вектор $\vec{m}(0; 4)$.

Рассуждая аналогично, можно прийти к следующему выводу.

Графиком функции $y = ax^2 + l$ является парабола, полученная из параболы $y = ax^2$ сдвигом вдоль оси Oy на $|l|$ единиц *вверх* при $l > 0$ и *вниз* при $l < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(0; l)$.

Понятно, что вершина параболы $y = ax^2 + l$ находится в точке $(0; l)$, а направление ветвей у неё такое же, как и у параболы $y = ax^2$.

Теперь рассмотрим случай, когда в формуле $y = a(x + h)^2 + l$ будет $l = 0$, то есть формула имеет вид $y = a(x + h)^2$.

Возьмём конкретные числовые значения a и h , скажем $a = \frac{1}{2}$, $h = 3$, и построим график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$.

Для построения этого графика возьмём несколько значений аргумента и найдём соответствующие значения функции.

x	-7	-6	-5	-4	3	2	1	0	1
y	12	8,5	6	4,5	4	4,5	6	8,5	12

Нанесём соответствующие точки на координатную плоскость (рис. 17). Соединив точки плавной линией, мы получим график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ (рис. 18).

Изобразим в одной координатной плоскости график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$, построенный нами сейчас (синего цвета), и график функции $y = \frac{1}{2}x^2$, построенный

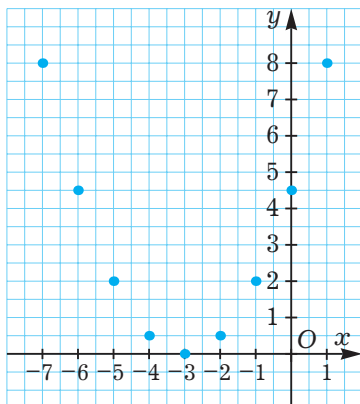


Рис. 17

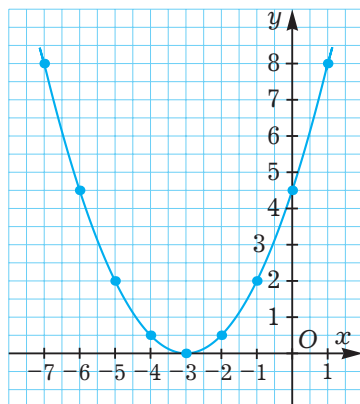


Рис. 18

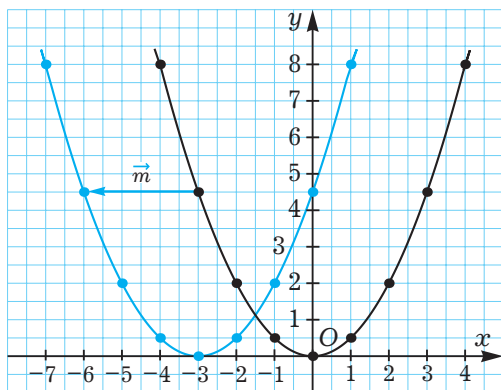


Рис. 19

в предыдущем параграфе (чёрного цвета), причём с отмеченными при их построении точками. Из рис. 19 хорошо видно, что на 3 единицы левее каждой чёрной точки лежит синяя точка. Вообще, если взять на графике $y = \frac{1}{2}x^2$ некоторую точку, то точка с такой же ординатой и абсциссой на 3 единицы меньшей будет лежать на графике $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$. Можно сказать, что график $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ получен из графика $y = \frac{1}{2}x^2$ *сдвигом (параллельным переносом)* вдоль оси Ox на 3 единицы *влево*. На векторном языке это звучит так: график получен параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-3; 0)$.

Рассуждая аналогично, можно прийти к следующему выводу.

Графиком функции $y = a(x + h)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = ax^2$ сдвигом вдоль оси Ox на $|h|$ единиц влево при $h > 0$ и вправо при $h < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-h; 0)$.

Понятно, что вершина параболы $y = a(x + h)^2$ находится в точке $(-h; 0)$, а направление ветвей у неё такое же, как и у параболы $y = ax^2$.

Обратите внимание, что направление сдвига вдоль осей Ox и Oy определяется по-разному. При сдвиге вдоль оси ординат положительность слагаемого в формуле соответствует сдвигу в положительном направлении оси, а отрицательность — к сдвигу в отрицательном направлении. При сдвиге вдоль оси абсцисс всё наоборот. Это обстоятельство находит своё выражение и в векторном виде: в записи вектора, характеризующего сдвиг вдоль оси ординат, слагаемое из формулы входит со своим знаком, а вдоль оси абсцисс — с противоположным.

Теперь понятно, что для построения графика функции $y = a(x + h)^2 + l$ можно по очереди выполнить два описанных выше сдвига: и вдоль оси абсцисс, и вдоль оси ординат. При этом неважно, в каком порядке выполнять эти сдвиги — ведь сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых. Можно вообще выполнить один сдвиг на результирующий вектор $\vec{m}(-h; l)$. Понятно, что вершина параболы $y = a(x + h)^2 + l$ находится в точке $(-h; l)$, а направление ветвей у неё такое же, как и у параболы $y = ax^2$.

Отметим также, что в процессе построения графиков функций $y = a(x + h)^2 + l$, когда одно из чисел h или l равно нулю, мы открыли правила, которые можно применять при построении многих других графиков.

График функции $y = f(x) + l$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|l|$ единиц вверх при $l > 0$ и вниз при $l < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(0; l)$.

График функции $y = f(x + h)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|h|$ единиц влево при $h > 0$ и вправо при $h < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-h; 0)$.

Мы ещё не раз будем применять в дальнейшем эти правила при построении самых разных графиков. Некоторые такие графики вы сможете построить, выполняя задания к данному параграфу.



Н

- 1 Закончите предложения.
 - а) Квадратичной функцией называется ...
 - б) Областью определения квадратичной функции является ...
- 2 Верно ли, что уравнение, задающее любую квадратичную функцию, можно переписать в виде $y = a(x + h)^2 + l$? Обоснуйте свой ответ.
- 3 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Как получить график функции $y = ax^2 + l$ из параболы $y = ax^2$?
 - б) Как получить график функции $y = a(x + h)^2$ из параболы $y = ax^2$?
 - в) Как получить график функции $y = a(x + h)^2 + l$ из параболы $y = ax^2$?
- 4
 - а) Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2 + l$?
 - б) Какая точка является вершиной параболы $y = a(x + h)^2$?
 - в) Какая точка является вершиной параболы $y = a(x + h)^2 + l$?
- 5
 - а) Как направлены ветви параболы $y = ax^2 + l$?
 - б) Как направлены ветви параболы $y = a(x + h)^2$?
 - в) Как направлены ветви параболы $y = a(x + h)^2 + l$?
- 6 Найдите значения функции $y = 2(x - 2)^2 - 2$ при указанных значениях аргумента:

а) 3;	в) 1;	д) $\frac{2}{3}$;	ж) $2 + \sqrt{5}$;
б) -1;	г) -4;	е) $\frac{3}{2}$;	з) -1,5.
- 7 Какие из точек принадлежат графику функции $y = -3(x - 1)^2 + 5$:

а) (1; 6);	в) (3; -7);	д) $\left(\frac{1}{2}; 4,5\right)$;	ж) $(1 - \sqrt{3}; -4)$;
б) (2; 2);	г) (-3; -44);	е) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{17}{25}\right)$;	з) (0,7; 4,71)?
- 8 Какие координаты имеет вершина параболы и как направлены её ветви:

а) $y = 2x^2 - 7$;	д) $y = -2(x + 3)^2 - 7$;
б) $y = -0,2(x - 3)^2$;	е) $y = x^2 - \sqrt{2}$;
в) $y = 11(x + 11)^2 - 11$;	ж) $y = -\frac{3}{7}(x - 1,12)^2 + \frac{7}{4}$;
г) $y = (x + 1)^2 + 2$;	з) $y = 23,01(x + 71)^2 - 11$?

Н

- 9** Для каждого из графиков укажите, как этот график может быть получен из графика функции $y = 3x^2$:

а) $y = -3x^2$; в) $y = 3(x+2)^2$;
б) $y = 3x^2 + 6$; г) $y = 3(x-1)^2 - 4$.

- 10** Запишите формулу, задающую функцию, если известно, что график этой функции может быть получен сдвигом параболы $y = -5x^2$:

- а) вдоль оси Oy на 2 единицы вверх;
б) вдоль оси Oy на 2 единицы вниз;
в) вдоль оси Ox на 2 единицы вправо;
г) вдоль оси Ox на 2 единицы влево.

- 11** Запишите формулу, задающую функцию, если известно, что график этой функции может быть получен сдвигом параболы $y = 2x^2$:

- а) вдоль оси Ox на 1 единицу вправо и вдоль оси Oy на 3 единицы вверх;
б) вдоль оси Ox на 4 единицы влево и вдоль оси Oy на 7 единиц вниз;
в) вдоль оси Ox на 3 единицы влево и вдоль оси Oy на 2 единицы вверх;
г) вдоль оси Ox на 0,5 единицы вправо и вдоль оси Oy на 3,5 единицы вниз.

- 12** Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 1$; в) $y = -x^2 - 1$; д) $y = -x^2 + 1$;
б) $y = (x-1)^2$; г) $y = -(x-1)^2$; е) $y = -(x+1)^2$.

- 13** Постройте график функции:

а) $y = -\frac{3}{4}x^2 + 1$; д) $y = -\frac{1}{8}(x+4)^2 - 3$;
б) $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$; е) $y = -(x-4)^2 + 4$;
в) $y = \frac{2}{3}(x+2)^2 - 2$; ж) $y = -4(x+1,5)^2 - \frac{5}{2}$;
г) $y = (x-4)^2 + 2,5$; з) $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}$.

П

- 14** Расскажите, приводя примеры.

- а) Как можно получить график функции $y = f(x) + l$ из графика функции $y = f(x)$?
б) Как можно получить график функции $y = f(x + h)$ из графика функции $y = f(x)$?
в) Как можно получить график функции $y = f(x + h) + l$ из графика функции $y = f(x)$?

15 Для каждого из графиков укажите, как этот график может быть получен из графика функции $y = f(x)$:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| а) $y = 4f(x)$; | д) $y = f(x-5)$; |
| б) $y = -f(x)$; | е) $y = f(x+8)$; |
| в) $y = f(x)-3$; | ж) $y = f(x-6)+7$; |
| г) $y = f(x)+2,4$; | з) $y = f(x+1)+2$. |

М

16 Даны графики четырёх функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ и $y = w(x)$ (рис. 20). Постройте графики функций:

- а) $y = f(x) + 2$; б) $y = g(x) - 2$; в) $y = h(x + 2)$; г) $y = w(x - 2)$.

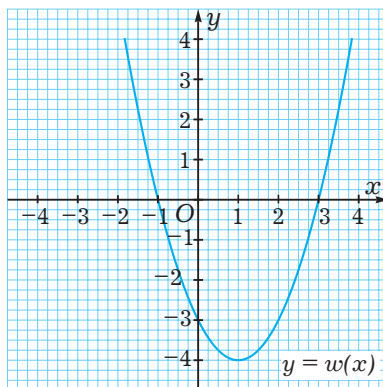
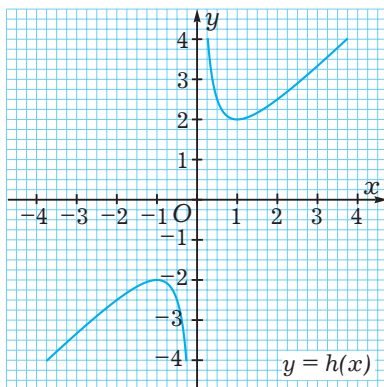
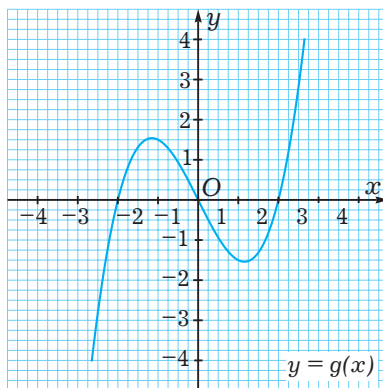
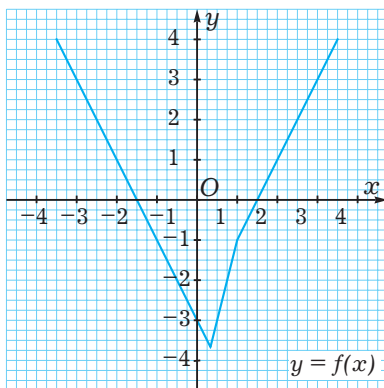


Рис. 20

17 Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x} + 3$;

б) $y = \sqrt{x} - 1$;

в) $y = \sqrt{x+4}$;

г) $y = \sqrt{x-1}$.

18 Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x} + 4$;

б) $y = \frac{1}{x} - 3$;

в) $y = \frac{1}{x+1}$;

г) $y = \frac{1}{x-2}$.

1.4

Построение графика квадратичной функции



Вспоминаем то, что знаем

- Какая функция называется квадратичной?
- Как выглядит формула, задающая квадратичную функцию, после выделения полного квадрата?
- Верно ли, что график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из графика функции $y = ax^2$? Если да, то с помощью какого преобразования?
- Какие координаты имеет вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$?
- Как направлены ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$? А при $a < 0$?
- Для каких значений аргумента функция $y = ax^2 + bx + c$ является возрастающей и для каких — убывающей при $a > 0$? А при $a < 0$?

Повторяем, обобщаем знания

Вы уже знаете, что квадратичная функция задаётся формулой $y(x) = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a , b и c — действительные числа, причём $a \neq 0$. После выделения полного квадрата эта формула приобретает вид:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

В предыдущем параграфе было установлено, что график функции, задаваемой такой формулой, является параболой $y = ax^2$, параллельно перенесённой на

вектор $\vec{m} \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a} \right)$.

Из сказанного вытекает следующий вывод.

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является параболой, вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. Осью симметрии этой параболы является вертикальная прямая, проходящая через вершину и задаваемая уравнением $x = -\frac{b}{2a}$, а ветви направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Абсцисса и ордината вершины параболы играют важную роль в решении многих задач. Будем обозначать их x_B и y_B , то есть $x_B = -\frac{b}{2a}$, $y_B = -\frac{D}{4a}$. В некоторых случаях ординату вершины проще вычислять, подставляя абсциссу вершины $x_B = -\frac{b}{2a}$ в формулу, задающую квадратичную функцию: $y_B = ax^2 + bx + c$, а в некоторых — по формуле с дискриминантом: $y_B = -\frac{D}{4a}$.

Скажем, для параболы $y = 2x^2 - 4x + 5$ абсцисса вершины равна $x_B = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$. Здесь ординату вершины легко найти, подставляя её абсциссу в формулу $y = 2x^2 - 4x + 5$. Получим: $y_B = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 3$.

А вот для параболы $y = 7x^2 - 11x + 2$, у которой абсцисса вершины равна $x_B = -\frac{-11}{2 \cdot 7} = \frac{11}{14}$, подстановка в формулу $y = 7x^2 - 11x + 2$ вместо x числа $\frac{11}{14}$ приведёт к громоздким вычислениям. Здесь проще найти дискриминант $D = (-11)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 121 - 56 = 65$, после чего ордината вершины находится легко: $y_B = -\frac{65}{4 \cdot 7} = -\frac{65}{28}$.

Важно уметь находить точки пересечения параболы с координатными осями.

Для нахождения точки пересечения параболы с осью ординат подставим $x = 0$ в формулу $y = ax^2 + bx + c$ и получим, что $y = c$. Таким образом, парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось ординат в точке $(0; c)$.

Для нахождения точки пересечения параболы с осью абсцисс подставим $y = 0$ в формулу $y = ax^2 + bx + c$ и увидим, что для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то есть найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Они называются также *нулями квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$.

При отрицательном дискриминанте квадратичная функция нулей не имеет, а значит, парабола не пересекает ось абсцисс.

При положительном дискриминанте квадратичная функция имеет два нуля: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, а значит, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках: $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.

Наконец, при нулевом дискриминанте квадратичная функция имеет единственный нуль: $x_1 = -\frac{b}{2a}$. В этом случае парабола имеет с осью абсцисс единственную общую точку $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$, причём понятно, что эта точка — вершина параболы. Говорят также: «вершина параболы лежит на оси абсцисс» или «парабола касается оси абсцисс в вершине».

При построении графика квадратичной функции обычно последовательность действий следующая.

- 1) Находят вершину параболы.
- 2) Определяют направление ветвей (вверх или вниз).
- 3) Находят точки пересечения параболы с координатными осями.
- 4) Находят несколько точек, лежащих на параболе, беря значения аргумента, прежде всего вблизи от абсциссы вершины.

Иногда, впрочем, встречаются ситуации, когда находить точки пересечения параболы с координатными осями не обязательно.

Построим, например, график функции: $y = \frac{1}{3}x^2 + x + 2$.

$$1) \text{ Найдём абсциссу вершины: } x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Найдём ординату вершины, вычислив сначала дискриминант: $D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{5}{3}$.

$$\text{Таким образом, } y_B = -\frac{D}{4a} = -\frac{-\frac{5}{3}}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}.$$

2) Поскольку старший коэффициент $\frac{1}{3}$ положительный, ветви параболы направлены вверх.

3) Возьмём несколько значений аргумента и найдём соответствующие значения функции. Начнём с того, что занесём в таблицу данные о вершине, а затем значения аргумента будем выбирать недалеко от абсциссы вершины.

x	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1
y	$\frac{10}{3}$	2	$\frac{4}{3}$	5	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{10}{3}$

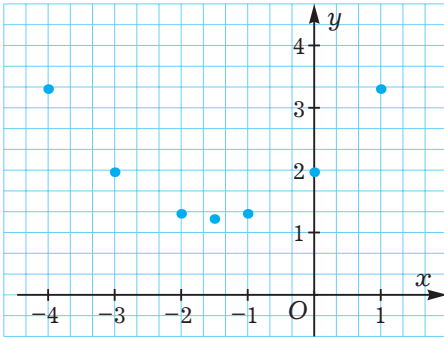


Рис. 21

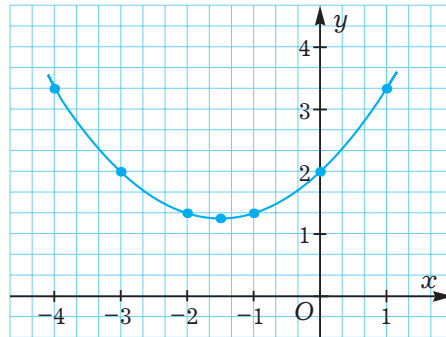


Рис. 22

Отметим на координатной плоскости вершину параболы $\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$, а затем и остальные точки. После этого нарисуем параболу с ветвями, направленными вверх.

Ось ординат парабола пересекает в точке $(0; 2)$, а точек пересечения с осью абсцисс нет, поскольку дискриминант отрицательный. Кстати, отсутствие точек пересечения с осью абсцисс можно установить из других соображений: поскольку вершина параболы лежит выше оси абсцисс (в верхней координатной полуплоскости), а ветви направлены вверх, то и вся парабола лежит в верхней полуплоскости.

Это свойство квадратичной функции будет неоднократно использоваться в дальнейшем. Сформулируем его в общем виде.

Если для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ выполняются соотношения $D < 0$ и $a > 0$, то график этой функции лежит в верхней полуплоскости.

Если для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ выполняются соотношения $D < 0$ и $a < 0$, то график этой функции лежит в нижней полуплоскости.

Можно дать и другую формулировку этого свойства, в которой оно трактуется уже как свойство квадратного трёхчлена.

Если для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ выполняются соотношения $D < 0$ и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всех действительных x .

Если для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ выполняются соотношения $D < 0$ и $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при всех действительных x .

Наконец, то же самое можно сказать и так:

Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицательный, то при всех значениях переменной этот квадратный трёхчлен принимает значения одного и того же знака, а именно: такого, какой знак старшего коэффициента.

Например, поскольку у квадратного трёхчлена $-2x^2 + 5x - 4$ дискриминант $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = -7 < 0$ и $a = -2 < 0$, то $-2x^2 + 5x - 4 < 0$ при всех действительных значениях x .

Построим график ещё одной квадратичной функции: $y = -x^2 - 4x + 1$.

1) Найдём абсциссу вершины: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2$.

Найдём ординату вершины, подставляя её абсциссу в формулу $y = -x^2 - 4x + 1$. Получим: $y_B = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = 5$.

2) Поскольку старший коэффициент (равный -1) отрицательный, ветви параболы направлены вниз.

3) Возьмём несколько значений аргумента и найдём соответствующие значения функции. Начнём с вершины, а затем значения аргумента будем выбирать недалеко от абсциссы вершины, причём, поскольку мы уже хорошо знаем, как выглядит парабола, будем для простоты вычислений брать их целыми.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	-4	1	4	5	4	1	-4

Нанесём на координатную плоскость сначала вершину $(-2; 5)$, а затем и остальные точки. После этого нарисуем параболу с ветвями, направленными вниз (рис. 23 и 24).

Точки пересечения с координатными осями видны на рис. 24. Ось ординат парабола пересекает в точке $(0; 1)$, одна точка пересечения с осью абсцисс расположена между -5 и -4 , а вторая — между 0 и 1 . Если потребуется определить эти точки точнее, придётся решить квадратное уравнение $-x^2 - 4x + 1 = 0$. Умножив обе части этого уравнения на -1 , перепишем его в виде $x^2 + 4x - 1 = 0$, найдём дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20$, а затем и нули квадратичной функции:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}, \text{ то есть } x_1 = -2 - \sqrt{5} \approx -4,2, x_2 = -2 + \sqrt{5} \approx 0,2.$$

В заключение параграфа, основываясь на сформулированных в параграфе 1.2 свойствах функции $y = ax^2$, перечислим основные свойства произвольной квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, отдельно при $a > 0$ и отдельно при $a < 0$.

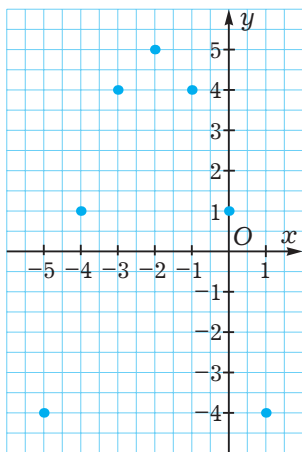


Рис. 23

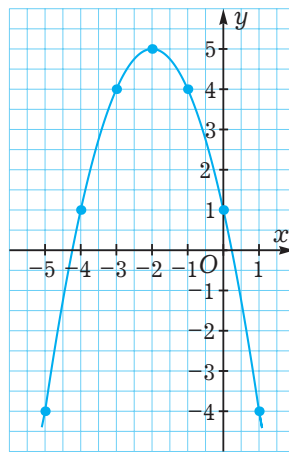


Рис. 24

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$.

- 1) Область определения — множество всех действительных x .
- 2) Графиком функции является парабола с вершиной $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, ветви которой направлены вверх, а осью симметрии является прямая $x = -\frac{b}{2a}$.
- 3) Функция является возрастающей при $x \geq -\frac{b}{2a}$ и убывающей при $x \leq -\frac{b}{2a}$.
- 4) Функция имеет наименьшее значение и не имеет наибольшего. Наименьшее значение функции равно $-\frac{D}{4a}$ и достигается при $x = -\frac{b}{2a}$.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$.

- 1) Область определения — множество всех действительных x .
- 2) Графиком функции является парабола с вершиной $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, ветви которой направлены вниз, а осью симметрии является прямая $x = -\frac{b}{2a}$.
- 3) Функция является убывающей при $x \geq -\frac{b}{2a}$ и возрастающей при $x \leq -\frac{b}{2a}$.
- 4) Функция имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего. Наибольшее значение функции равно $-\frac{D}{4a}$ и достигается при $x = -\frac{b}{2a}$.

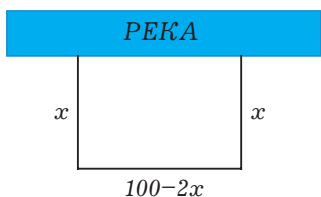


Рис. 25

Перечисленные свойства квадратичной функции находят применение при решении многих задач.

Рассмотрим одну из таких задач. Требуется огородить забором с трёх сторон прямоугольный участок земли, примыкающий одной стороной к реке, так, чтобы его площадь была наибольшей. Какие должны быть размеры этого участка, если общая длина забора составляет 100 м?

Пусть длина стороны прямоугольника, перпендикулярной реке, равна x м, тогда длина стороны прямоугольника, параллельной реке, равна $100 - 2x$ м, а площадь равна $x(100 - 2x)$ м².

Нам нужно найти наибольшее значение выражения $x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$, являющегося квадратным трёхчленом, у которого $a = -2$, $b = 100$, $c = 0$. Вычислим дискриминант: $D = 100^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 10\,000$. Поскольку $a = -2 < 0$, то квадратный

трёхчлен имеет наибольшее значение, равное $-\frac{D}{4a} = -\frac{10\,000}{4 \cdot (-2)} = 1\,250$, причём до-

стигается оно при $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-2)} = 25$. При этом $100 - 2x = 100 - 2 \cdot 25 = 50$.

Таким образом, наибольшую площадь будет иметь участок со стороной, перпендикулярной реке, 25 м, и стороной, параллельной реке, 50 м. Площадь такого участка наибольшей площади составляет 1250 м².

Развиваем умения



Н

1

Расскажите, приводя примеры.

а) Как получить график функции $y = ax^2 + bx + c$ из параболы $y = ax^2$?

б) Какая прямая является осью симметрии графика функции $y = ax^2 + bx + c$?

2

а) Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$?

б) Как направлены ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$?

3

При каких значениях аргумента квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ является возрастающей, если:

а) $a > 0$;

б) $a < 0$?

4

При каких значениях аргумента квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ является убывающей, если:

а) $a > 0$;

б) $a < 0$?

5

Расскажите, приводя примеры, при каких условиях квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех действительных значениях переменной x :

а) положителен;

б) отрицателен.

6 Найдите координаты вершины параболы:

- а) $y = x^2 - 6x + 1$; д) $y = -3x^2 + 4x + 2$;
б) $y = -2x^2 + 5x$; е) $y = -8x^2 + 10x + 8$;
в) $y = 2x^2 + 2x - 9$; ж) $y = 10x^2 + 7x + 3$;
г) $y = -5x^2 - 4x + 4$; з) $y = 3x^2 + 7x + 3$.

7 Какие координаты имеет вершина параболы и как направлены её ветви:

- а) $y = 2x^2 - x - 2$; д) $y = -2x^2 - 8x$;
б) $y = x^2 - 6x$; е) $y = \frac{19}{18}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{5}$;
в) $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{13}{18}$; ж) $y = -\frac{3}{7}x^2 - \frac{5}{14}x + \frac{3}{4}$;
г) $y = 12x^2 - \frac{14}{19}x - 2$; з) $y = -5x^2 + 15x - \frac{13}{8}$?

8 Найдите точки пересечения параболы с координатными осями:

- а) $y = -3x^2 + 12x$; д) $y = -x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$;
б) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 40$; е) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{49}{2}$;
в) $y = 4x^2 - 34x + 42$; ж) $y = 9x^2 - 6x - 10$;
г) $y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x + 63$; з) $y = 4x^2 - 4x - 1$.

9 Укажите, какие из парабол касаются оси абсцисс и в какой точке:

- а) $y = -5x^2$; д) $y = 12x^2 - 24x + 12$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 2$; е) $y = 80x^2 + 120x + 45$;
в) $y = 3x^2 + 10x + 10$; ж) $y = -64x^2 - 96x - 36$;
г) $y = 2x^2 - 6x + 3$; з) $y = 32x^2 + 144x + 162$.

Н

10 Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите коэффициенты a , b и c , если известно, что её график может быть получен сдвигом параболы $y = -2x^2$:

- а) вдоль оси Oy на 2 единицы вверх;
б) вдоль оси Oy на 2 единицы вниз;
в) вдоль оси Ox на 2 единицы вправо;
г) вдоль оси Ox на 2 единицы влево.

- 11** Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите коэффициенты a , b и c , если известно, что её график может быть получен сдвигом параболы $y = \frac{1}{2}x^2$:
- а) вдоль оси Ox на 1 единицу вправо и вдоль оси Oy на 3 единицы вверх;
 - б) вдоль оси Ox на 2 единицы вправо и вдоль оси Oy на 2 единицы вниз;
 - в) вдоль оси Ox на 5 единиц влево и вдоль оси Oy на 1 единицу вниз;
 - г) вдоль оси Ox на 2,2 единицы влево и вдоль оси Oy на 1,1 единицы вверх.

- 12** Постройте график функции:

а) $y = -x^2 + 2x$;	д) $y = -\frac{5}{3}x^2 + 2$;
б) $y = x^2 + 4x + 4$;	е) $y = \frac{3}{4}x^2 - 1$;
в) $y = 4x^2 + 8x + 4$;	ж) $y = x^2 - 6x + 5$;
г) $y = 2x^2 - 12x + 18$;	з) $y = -x^2 - 2x - 3$.

- 13** Постройте график функции:

а) $y = -2x^2 + 2x - 3$;	д) $y = 2x^2 + 4x + 1$;
б) $y = -3x^2 - 3x - \frac{23}{4}$;	е) $y = -3x^2 - 3x + \frac{17}{4}$;
в) $y = 2x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{41}{9}$;	ж) $y = 2x^2 + 4x - 2$;
г) $y = -x^2 - \frac{1}{5}x + 3$;	з) $y = -x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{49}{25}$.

- 14** Постройте график функции:

а) $y = x(x - 4)$;	д) $y = x(x + 2)$;
б) $y = (x - 2)(x - 6)$;	е) $y = (x - 4)(x - 2)$;
в) $y = (3 - x)(x + 5)$;	ж) $y = (-1 - x)(3 + x)$;
г) $y = (x - 4)(x + 3)$;	з) $y = (5 - x)(2 + x)$.

- 15** Постройте график функции и перечислите её основные свойства:

а) $y = x^2 + 6x - 7$;	д) $y = -12x^2 - 6x + 6$;
б) $y = -2x^2 + 4x$;	е) $y = x^2 - 6x + 8$;
в) $y = 3x^2 - 2x - 1$;	ж) $y = x^2 + 4x + 3$;
г) $y = -10x^2 + \frac{18}{5}$;	з) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$.

- 16** Найдите наименьшее или наибольшее значение функции:

а) $y = x^2 + 2x + 4$;	в) $y = -2x^2 + 20x - 53$;
б) $y = -x^2 + 8x$;	г) $y = -2x^2 - 12x - 19$;

д) $y = 5x^2 + 40x + 81$;

ж) $y = 4x^2 + 24x + 39$;

е) $y = 3x^2 - 24x + 44$;

з) $y = -x^2 - 8x - 11$.

- 17** Найдите наименьшее или наибольшее значение функции. При каком значении аргумента оно достигается?

а) $y = 2x^2 + x - 3$;

д) $y = -3x^2 - \frac{24}{5}x - \frac{48}{25}$;

б) $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{29}{15}$;

е) $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{17}{5}$;

в) $y = 4x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{301}{36}$;

ж) $y = 2x^2 + 4x + 7$;

г) $y = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{12}$;

з) $y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{19}{500}$.

П

- 18** Сколько общих точек могут иметь парабола $y = ax^2 + bx + c$ и прямая $y = kx + l$?
- 19** Сколько общих точек могут иметь две различные параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$?
- 20** При каком значении p параболы $y = -3x^2 + 2x + p$ и $y = x^2 + 12x$ имеют единственную общую точку? Найдите координаты этой точки.
- 21** При каких значениях параметров p и q параболы $y = x^2 + px + q + p^2$ и $y = (1 - q)x^2 + 2qx + p^2$ не имеют общих точек? Изобразите это множество точек на плоскости Opq .
- 22** Представьте число 81 в виде суммы двух положительных чисел a и b . При каких a и b сумма $a^2 + 2b^2$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение.
- 23** (Обобщение задачи 22) Положительное число N представимо в виде суммы двух положительных чисел a и b . При каких a и b сумма $Ma^2 + Kb^2$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение, если $M > 0$ и $K > 0$.
- 24** Докажите, что среди всех прямоугольников, имеющих периметр P , квадрат имеет наибольшую площадь.

25 Для каждого из графиков функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 26) определите, положительным, отрицательным или равным нулю является каждое из чисел a , b , c и D .

26 Докажите, что если параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ имеют три общие точки, то они совпадают.

27 Для схематических графиков функций $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ (рис. 27, парабола I) и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ (рис. 27, парабола II) сравните коэффициенты b_1 и b_2 .

28 Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - 2x|$; в) $x^2 - 3x + |x| + 1$;

б) $y = x^2 - 2|x|$; г) $x^2 - |x^2 - 1|$.

29 На плоскости заданы три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, не лежащие на одной прямой и имеющие различные абсциссы. Найдите коэффициенты a , b и c параболы $y = ax^2 + bx + c$, которая проходит через эти точки. Может ли через эти три точки проходить две или более различных параболы? Подсказка: задача может быть решена без систем алгебраических уравнений.

30 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 - 2ax^3 + (b + a^2 - 1)x^2 + 2ax - a^2 - b}{x^2 - 1}$$

и постройте её график.

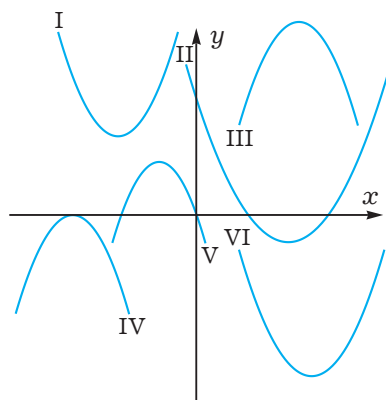


Рис. 26

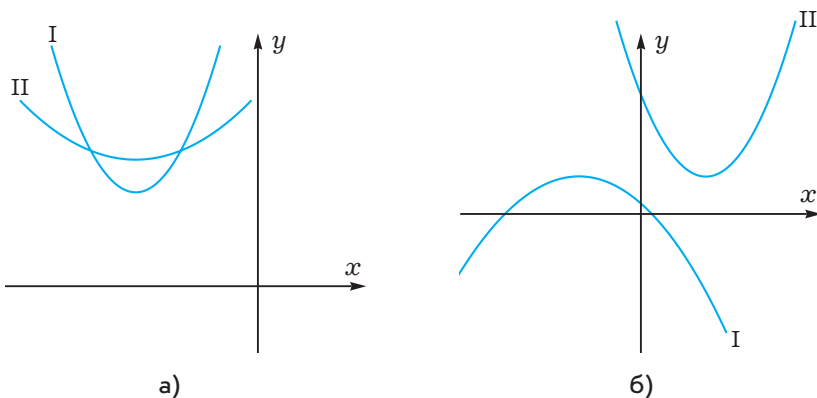


Рис. 27



Исследовательский проект «Параболическое решето»

Интересным способом получения простых чисел является так называемое «параболическое решето». Рассмотрите функцию $y = x^2$ и точки $A(a, a^2)$ и $B(b, b^2)$, где $a = -1; -2; -3; \dots$, $b = 1; 2; 3; \dots$. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B , после чего с помощью этого уравнения найдите ординату точки пересечения этой прямой с осью ординат. На основе полученного результата постройте процесс «отсева» натуральных чисел, которые лежат на оси ординат и которые не являются простыми.



Исследовательский проект «Подобие парабол»

Из курса геометрии вы знакомы с понятием подобия геометрических фигур.

Докажите, что любые две параболы подобны (кстати, одно из значений древнегреческого слова «парабола» как раз «подобие»). Установите, чему равен коэффициент подобия двух парабол.



Исследовательский проект «Фокус и директриса параболы»

Докажите, что геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки и данной прямой, является параболой. Упомянутая точка называется *фокусом параболы*, а прямая — *директрисой параболы*.

Найдите фокус и директрису параболы $y = ax^2 + bx + c$.



Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Падение тяжёлого предмета без учёта сопротивления воздуха.

ВАША РОЛЬ. Баллистик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. С самолёта, движущегося параллельно поверхности Земли со скоростью 800 км/ч на высоте 8 км, сбрасывается без начальной скорости тяжёлый металлический шарик. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

ЗАДАНИЯ. а) По какой траектории будет двигаться шарик?

б) Через какое время шарик упадёт на Землю?

в) На какое расстояние сместится шарик вдоль поверхности Земли за время своего падения?



Вспоминаем то, что знаем

- Как сравнить два натуральных числа?
- В чём заключается поразрядное сравнение двух натуральных чисел? Двух конечных положительных десятичных дробей? Двух произвольных положительных десятичных дробей (неважно, конечных или бесконечных)?
- Как сравнить две положительные обыкновенные дроби?
- По каким правилам сравниваются между собой два отрицательных числа?
- По каким правилам сравниваются между собой два произвольных действительных числа?

Повторяем, обобщаем знания

Простейшие числовые неравенства в школьном курсе математики впервые появились при сравнении чисел ещё в первом классе. Сравнение чисел — одно из базовых умений, которыми должен владеть школьник. Сначала вы научились сравнивать натуральные числа, затем положительные обыкновенные дроби, затем рациональные числа и, наконец, действительные. При этом правила сравнения чисел при переходе к более широкому числовому множеству уточнялись. Вспомним вкратце основные из них.

Сначала для сравнения небольших натуральных чисел применялось правило: из двух натуральных чисел меньше то, которое раньше встречается при счёте. Скажем, $7 < 9$, поскольку при счёте число 7 встречается раньше, чем число 9.

Затем, изучив многозначные числа, вы стали пользоваться правилами поразрядного сравнения натуральных чисел.

1) Если количество разрядов в двух числах различное, то меньше то число, у которого количество разрядов меньше.

2) Если количество разрядов в двух числах одинаковое, то производим поразрядное сравнение, начиная с самого левого разряда. Если цифры самого левого разряда различны, тогда меньше то число, у которого эта цифра меньше. Если же цифры самого левого разряда одинаковые, то нужно перейти к сравнению цифр следующего разряда, и т. д.

Сравним числа 5 463 и 5 471. Количество разрядов у этих чисел одинаковое (по 4), значит, будем сравнивать поразрядно. Цифры самого левого разряда одинаковые ($5 = 5$), переходим к следующим цифрам. Они тоже одинаковые ($4 = 4$),

переходим к следующим цифрам. Здесь цифра первого числа меньше цифры второго ($6 < 7$), следовательно, первое число меньше второго: $5\,463 < 5\,471$. Обратите внимание, что, сравнивая между собой цифры соответственных разрядов, мы пользовались предыдущим правилом сравнения: меньше то однозначное число, которое раньше встречается при счёте.

При сравнении обыкновенных дробей с натуральными числителями и знаменателями в пятом классе вы применяли следующий набор правил:

- 1) Из двух дробей с одинаковыми знаменателями меньше та, числитель которой меньше.
- 2) Из двух дробей с одинаковыми числителями меньше та, знаменатель которой больше.
- 3) Если у дробей различны и числители, и знаменатели, то дроби нужно привести к общему знаменателю.

Например, дроби $\frac{9}{16}$ и $\frac{9}{17}$ сравним по правилу 2, так как их числители одинаковы. Сравниваем знаменатели. Поскольку $16 < 17$, то $\frac{9}{16} > \frac{9}{17}$.

А вот дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{14}{17}$ придётся сравнивать по правилу 3. Приведём их к общему знаменателю $6 \cdot 17 = 102$:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 17}{6 \cdot 17} = \frac{85}{102}; \quad \frac{14}{17} = \frac{16 \cdot 6}{17 \cdot 6} = \frac{96}{102}.$$

Теперь сравниваем числители полученных дробей. Поскольку $85 < 96$, то $\frac{85}{102} < \frac{96}{102}$, а значит, $\frac{5}{6} < \frac{14}{17}$.

Обратите внимание, что в процессе сравнения дробей мы пользовались правилом сравнения натуральных чисел (числителей или знаменателей дробей).

При сравнении положительных действительных чисел, которые записываются в виде конечных или бесконечных десятичных дробей, мы опять используем сравнение по разрядам. Заметим, что при сравнении неважно, периодические дроби или непериодические, важно лишь, чтобы в случае периодичности период таких дробей не состоял из одних девяток.

Сравним, к примеру, числа $12,(27)$ и $12,272772777\dots$ (каждая следующая группа семёрок длиннее на одну цифру, чем предыдущая). Из уроков математики в шестом классе вы знаете, что первое число рационально, а второе иррационально. Поскольку целые части этих чисел равны ($12 = 12$), начнём сравнивать разряды после запятой слева направо, выписав сначала у первого числа несколько периодов: $12,27272727\dots$ Цифры первого разряда после запятой равны ($2 = 2$), второго равны ($7 = 7$), третьего равны ($2 = 2$), четвёртого равны ($7 = 7$), лишь цифра пятого разряда после запятой у первого числа меньше, чем у второго ($2 < 7$). Таким образом, мы установили, что $12,(27) < 12,272772777\dots$.

И, наконец, для сравнения любых двух действительных чисел к правилам сравнения положительных чисел добавляются ещё следующие:

- 1) Нуль больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного.
- 2) Любое отрицательное число меньше любого положительного.
- 3) Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше.

Например, сравним числа $0,000(122)$ и $-\frac{2}{9}$. Первое число положительно, а второе отрицательно, следовательно, $0,000(122) > -\frac{2}{9}$.

Сравним числа -99 и -101 . Оба числа отрицательны, следовательно, сравним их модули — положительные числа 99 и 101 . Так как числа натуральные и первое содержит два разряда, а второе — три, то $99 < 101$, а значит, $-99 > -101$.

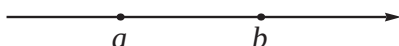
Заметим, что при сравнении чисел, кроме общих правил, которые мы повторили выше, используются ещё и разные другие правила и соображения. Например, в 8-м классе вы установили, что из двух арифметических корней меньше тот, у которого подкоренное выражение меньше. Это позволяет нам сразу записать, что $\sqrt{5} < \sqrt{6}$, а не находить приближённые значения корней (как вы знаете, оба эти числа иррациональны), чтобы сравнить их поразрядно: $\sqrt{5} = 2,23606\dots$ и $\sqrt{6} = 2,44948\dots$.

Выполняя сравнение любых двух действительных чисел, мы всегда приходим к следующему результату.

Для любых двух действительных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх отношений: $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Ещё из курса математики 6-го класса вы знаете, что действительные числа можно изображать точками числовой прямой. Точнее это значит следующее: каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой соответствует единственное действительное число. Вы даже научились доказывать второе из этих утверждений.

Если нанести на числовую прямую точки, соответствующие двум действительным числам, то точка, соответствующая меньшему числу, будет лежать левее:



$$a < b$$

Рис. 28

Развиваем умения



1

Расскажите, приводя примеры.

- а) Как сравнить два однозначных натуральных числа?
- б) Как сравнить два многозначных натуральных числа?

2 🌍 Расскажите, приводя примеры, как сравнить две обыкновенные дроби с натуральными числителем и знаменателем, у которых:

- а) одинаковые числители;
- б) одинаковые знаменатели;
- в) различные и числители, и знаменатели.

3 🌍 Расскажите, приводя примеры, как сравнить два положительных действительных числа.

4 🌍 Расскажите, приводя примеры, как сравнить два произвольных действительных числа.

5 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) -116 и 1 ; в) -181 и 130 ; д) 153 и -178 ; ж) 115 и -102 ;
- б) 94 и -198 ; г) -46 и -170 ; е) 43 и 133 ; з) -72 и 100 .

6 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) $-66,0406$ и $-65,9913$; д) $134,443$ и $134,361$;
- б) $-65,0053$ и $-64,924$; е) $-3,76334$ и $-3,60451$;
- в) $-74,0785$ и $-73,9817$; ж) $-71,9847$ и $-71,9373$;
- г) $103,953$ и 104 ; з) $139,693$ и $139,773$.

7 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) 4 и $\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{4}$; д) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{13}$; ж) $\frac{5}{4}$ и 3 ;
- б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{11}$ и 2 ; е) $\frac{9}{4}$ и $\frac{1}{2}$; з) $\frac{8}{5}$ и $\frac{2}{5}$.

8 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) $-\frac{7}{6}$ и $-\frac{136}{169}$; в) $-\frac{85}{133}$ и $-\frac{145}{154}$; д) $\frac{76}{197}$ и $\frac{39}{35}$; ж) $\frac{70}{29}$ и $\frac{51}{74}$;
- б) $-\frac{2}{7}$ и $-\frac{152}{93}$; г) $-\frac{19}{78}$ и $-\frac{36}{173}$; е) $\frac{7}{13}$ и $\frac{5}{67}$; з) $\frac{33}{86}$ и $\frac{143}{161}$.

Н

9 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) $-\frac{177}{14}$ и $-12,69$; д) $\frac{17}{3}$ и $5,68$;
- б) $\frac{93}{61}$ и $1,6$; е) $-\frac{49}{15}$ и $-3,358$;
- в) $\frac{196}{135}$ и $1,4$; ж) $-\frac{23}{12}$ и $-1,878$;
- г) $\frac{96}{89}$ и $1,154$; з) $\frac{49}{31}$ и $1,49$.

10 Расположите числа в порядке возрастания:

- а) $\frac{22}{147}$, $\frac{4}{19}$, 0,13 и 0,184; в) $\frac{53}{104}$, 0,444, 0,94 и $\frac{29}{31}$;
б) 0,23, $-\frac{127}{98}$, -1,371 и $\frac{18}{107}$; г) 0,5, 0,06, $\frac{7}{187}$ и $\frac{18}{35}$.

11 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) $3\sqrt{14}$ и $\sqrt{139}$; д) $\sqrt{158}$ и $2\sqrt{11}$;
б) $\sqrt{133}$ и $\sqrt{93}$; е) 7 и $\sqrt{49}$;
в) $\sqrt{103}$ и $\sqrt{197}$; ж) $\sqrt{193}$ и $\sqrt{57}$;
г) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{1,9}$; з) $4\sqrt{15}$ и $2\sqrt{41}$.

12 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

- а) $\sqrt{\frac{127}{31}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{181}{2}}$; д) $\sqrt{65}$ и $\sqrt{\frac{91}{165}}$;
б) $3\sqrt{\frac{3}{19}}$ и $2\sqrt{\frac{2}{89}}$; е) $\sqrt{\frac{113}{103}}$ и $\frac{5}{2\sqrt{2}}$;
в) $\sqrt{\frac{118}{179}}$ и $2\sqrt{\frac{21}{167}}$; ж) $\sqrt{\frac{151}{29}}$ и $\sqrt{\frac{87}{89}}$;
г) $4\sqrt{\frac{3}{23}}$ и $\sqrt{\frac{97}{165}}$; з) $\sqrt{\frac{145}{3}}$ и $\sqrt{\frac{82}{31}}$.

13 Какие из чисел положительны:

- а) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{37}{7}} - \frac{1533}{1000}$; в) $6\sqrt{\frac{3}{41}} - 1,623$;
б) $\sqrt{3} - \frac{433}{250}$; г) $2\sqrt{\frac{26}{185}} - \frac{3}{4}$.

П

14 При сравнении обыкновенных дробей $\frac{17}{16}$ и $\frac{18}{19}$ пятиклассник Толя отказался

приводить их к общему знаменателю, сказав, что он сразу видит, что первая дробь больше единицы, а вторая — меньше.

а) Сформулируйте утверждение, которым планировал воспользоваться Толя.

б) Закончите сравнение дробей $\frac{17}{16}$ и $\frac{18}{19}$.

в) Попробуйте сравнить подобным образом дроби $\frac{47}{24}$ и $\frac{55}{27}$.

- 15** В математике часто вместо некоторых иррациональных чисел используют их приближённые значения, чтобы быстрее и легче производить вычисления, когда ошибки, возникающие в результате этих замен, малы. Скажем, вместо известного вам числа π можно использовать дробь $\frac{355}{113}$, которая при представлении её в виде десятичной дроби совпадает с π вплоть до шестого знака после запятой (убедитесь в этом с помощью калькулятора). Попробуйте найти приближение для числа $\sqrt{2}$ в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$, такой, что a и b не превышают 100, которая при представлении её в виде десятичной дроби совпадала бы с $\sqrt{2}$ вплоть до четвёртого знака после запятой. Для решения задачи вы можете использовать калькулятор.

М

- 16** Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

а) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{6} + 1$;

в) $\sqrt{10} - 3$ и $\sqrt{11} - \frac{16}{5}$;

б) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ и $\sqrt{7} + 2$;

г) $\frac{547}{40} - \sqrt{187}$ и $\frac{249}{10} - \sqrt{620}$.

- 17** Сравните числа ($<$, $>$, $=$):

а) $(\sqrt{5} - 2)^{-1}$ и $\sqrt{5} + 2$;

в) $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2} - \sqrt{6})$ и $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$;

б) $2\sqrt{3} + \sqrt{11}$ и $(\sqrt{12} - \sqrt{11})^{-1}$;

г) $\frac{4 - 2\sqrt{30}}{\sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7}}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}$.

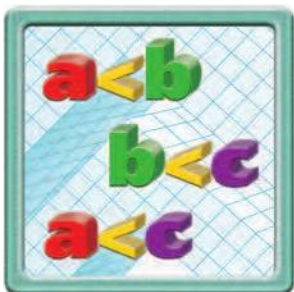
- 18** Используя свойства квадратного трёхчлена с отрицательным дискриминантом, сравните с нулём следующие числа:

а) $1,507^2 - 3 \cdot 1,507 + 2,5$;

в) $-(\sqrt{777} - \sqrt{77})^2 + 9(\sqrt{777} - \sqrt{77}) - 21$;

б) $(\sqrt{7} - 1)^2 - 3(\sqrt{7} - 1) + 2,5$;

г) $-6 \cdot 3442,7104^2 + 7 \cdot 3442,7104 - 6$.



Знакомимся с новыми знаниями

В предыдущем параграфе мы повторяли изученные вами ранее методы сравнения чисел и говорили о том, как результат сравнения можно изобразить на числовой прямой: точка, соответствующая меньшему числу, лежит левее точки, соответствующей большему (рис. 29).

Вспомним изученное вами в 6-м классе правило сложения действительных чисел с помощью числовой прямой: сумма числа x и ненулевого числа y изображается точкой числовой прямой, находящейся на расстоянии $|y|$ от точки x справа при $y > 0$ и слева при $y < 0$.

Рассмотрим равенство $a = b + (a - b)$.

Из левого рисунка можно сделать вывод: к числу, изображаемому точкой b , прибавили число $a - b$ и получили в результате число a , изображаемое точкой, лежащей правее точки b . Отсюда ясно, что прибавленное число $a - b$ положительно. Таким образом, можно заключить, что при $a > b$ разность $a - b$ положительна.

Можно провести и обратное рассуждение. Если разность $a - b$ положительна, то сумма $b + (a - b)$, то есть a , изображается точкой числовой прямой, лежащей справа от точки b . А это значит, что $a > b$.



Рис. 29

Таким образом, установлено, что $a > b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ положительна.

Рассуждая аналогично с опорой на правый рисунок, можно установить, что $a < b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ отрицательна.

Установленные закономерности являются основными при работе с неравенствами. Опираясь на них, можно доказывать все остальные свойства неравенств. Перед тем как заняться этим, ещё раз запишем:

$a > b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ положительна.
 $a < b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ отрицательна.

Уже сами по себе эти формулировки позволяют решать много непростых задач. Рассмотрим пример.

Числитель и знаменатель дроби — не равные между собой натуральные числа. К числителю и знаменателю прибавили одно и то же натуральное число. Увеличилась или уменьшилась от этого первоначальная дробь?

Пусть начальная дробь $\frac{x}{y}$, причём $x \neq y$. После того как к числителю и знаменателю прибавили натуральное число z , получилась новая дробь $\frac{x+z}{y+z}$. Рассмотрим разность новой и начальной дробей и преобразуем её:

$$\frac{x+z}{y+z} - \frac{x}{y} = \frac{\cancel{x}y + y\cancel{z} - \cancel{x}y - x\cancel{z}}{y(y+z)} = \frac{yz - xz}{y(y+z)} = \frac{z(y-x)}{y(y+z)}.$$

Разность дробей будет положительной, если $y - x$ положительно, то есть $y > x$, и отрицательной, если $y - x$ отрицательно, то есть $y < x$.

Ответ: Если первоначальная дробь правильная, то от описанной процедуры она увеличилась, а если неправильная, то уменьшилась.

Переходим к формулировкам и доказательствам основных свойств числовых неравенств.

Свойство 1. Если $a > b$, то $b < a$. Если $a < b$, то $b > a$.

Докажем первое утверждение.

Если $a > b$, то число $a - b$ положительное, тогда противоположное ему число $b - a$ отрицательное, поэтому $b < a$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Свойство 2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

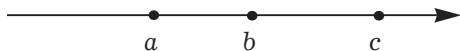
Докажем первое утверждение.

Если $a < b$, то число $a - b$ отрицательное. Если $b < c$, то число $b - c$ отрицательное. Сложив два отрицательных числа, получим отрицательное число: $(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$. Итак, число $a - c$ отрицательное, а поэтому $a < c$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 30.

Первое утверждение



Второе утверждение



Рис. 30

Для первого утверждения геометрическая формулировка следующая.

Если точка a лежит левее точки b , а точка b — левее точки c , то точка a лежит левее точки c .

Свойство 3. Если $a < b$ и c — любое действительное число, то $a + c < b + c$.

Если $a < b$, то число $a - b$ отрицательное. Теперь рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + c$. Имеем: $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$, то есть эта разность отрицательна. А это значит, что $a + c < b + c$, что и требовалось доказать.

Свойство 3 полезно формулировать в виде:

Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, и если из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получится верное неравенство.

Свойство 4. Если $a < b$ и c — любое положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и c — любое отрицательное число, то $ac > bc$.

Докажем первое утверждение.

Если $a < b$, то число $a - b$ отрицательное. Теперь рассмотрим разность чисел ac и bc . Имеем: $ac - bc = (a - b)c$, и поскольку число $a - b$ отрицательно, а число c положительно, то их произведение, число $(a - b)c$, отрицательно. Значит, и разность чисел $ac - bc$ отрицательна. А это значит, что $ac < bc$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Свойство 4 полезно формулировать в следующем виде.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и знак неравенства заменить на противоположный (иногда образно говорят «развернуть»), то получится верное неравенство.

Из свойства 4 следует, что если числа a и b положительны и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Действительно, деля обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab , по-

лучим: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, или после сокращения дробей: $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, что по свойству 1 можно

также записать в виде $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Свойство 5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Докажем первое утверждение.

Если $a < b$, то число $a - b$ отрицательное. Если $c < d$, то число $c - d$ тоже отрицательное. Теперь рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + d$. Имеем:

$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d)$, то есть эта разность равна сумме двух отрицательных чисел, а значит, отрицательна. А это значит, что $a + c < b + d$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Для другой формулировки свойства 5 нам сначала понадобится ознакомиться с новой терминологией. Если у нескольких неравенств знаки неравенств одинаковые, то есть все знаки $<$ или все знаки $>$, то говорят, что все эти неравенства *одинакового смысла* или *одинакового вида*.

Теперь сформулируем свойство 5 в следующем виде.

Если сложить почленно два верных неравенства одинакового смысла, то получится верное неравенство такого же смысла.

Можно складывать почленно не только два, но и любое количество верных неравенств одинакового смысла.

Свойство 6.

Если $a < b$ и $c < d$, причём все числа a, b, c, d положительны, то $ac < bd$.

Если $a > b$ и $c > d$, причём все числа a, b, c, d положительны, то $ac > bd$.

Докажем первое утверждение.

Сначала применим свойство 4. Умножая обе части неравенства $a < b$ на положительное число c , получим: $ac < bc$. Умножая обе части неравенства $c < d$ на положительное число b , получим: $bc < bd$. Теперь по свойству 2 из неравенств $ac < bc$ и $bc < bd$ следует $ac < bd$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Сформулируем свойство 6 в следующем виде:

Если перемножить почленно два верных неравенства одинакового смысла с положительными левыми и правыми частями, то получится верное неравенство такого же смысла.

Можно перемножать почленно не только два, но и любое количество верных неравенств одинакового смысла с положительными левыми и правыми частями.

В частности, можно перемножать неравенство само с собой несколько раз. В результате получаем следствия из свойства 6:

Если $a < b$, причём числа a и b положительны, а n — натуральное число, большее 1, то $a^n < b^n$.

Если $a > b$, причём числа a и b положительны, а n — натуральное число, большее 1, то $a^n > b^n$.

Свойства 5 и 6 позволяют, зная пределы, в которых находятся два положительных числа, установить, в каких пределах находится их сумма, разность, произведение и частное (как говорят, *оценить их*).

Например, пусть $20 < x < 21$, а $4 < y < 5$.

Как вы уже знаете из курса 6-го класса, такие неравенства называются *двойными*.

Для оценки суммы $x + y$ сложим почленно эти два двойных неравенства одинакового смысла. Это удобно делать в столбик:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 20 < x < 21 \\
 \quad 4 < y < 5 \\
 \hline
 24 < x + y < 26.
 \end{array}$$

Мы получили оценку для суммы $x + y$ в виде: $24 < x + y < 26$.

Для оценки разности $x - y$ будем трактовать её как сумму чисел x и $-y$. Сначала умножим все три части двойного неравенства $4 < y < 5$ на отрицательное число -1 (с разворачиванием знаков неравенств). По свойству 4 получим: $-4 > -y > -5$, затем по свойству 1 перепишем это неравенство в виде: $-5 < -y < -4$. Это неравенство сложим с неравенством $20 < x < 21$, одинакового с ним смысла:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 20 < x < 21 \\
 \quad -5 < -y < -4 \\
 \hline
 15 < x - y < 17.
 \end{array}$$

Мы получили оценку для разности $x - y$ в виде: $15 < x - y < 17$.

Для оценки произведения xy перемножим почленно эти два двойных неравенства одинакового смысла, все части которых положительны. Запись тоже будем вести, записывая перемножаемые неравенства одно под другим:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 20 < x < 21 \\
 \quad 4 < y < 5 \\
 \hline
 80 < xy < 105.
 \end{array}$$

Наконец, для оценки частного $\frac{x}{y}$ будем трактовать его как произведение чисел x и $\frac{1}{y}$. Применяя к двойному неравенству $4 < y < 5$ следствие из свойства 4, получим $\frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$, затем по свойству 1 перепишем это неравенство в виде: $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$.

Это неравенство перемножим с неравенством $20 < x < 21$ одинакового с ним смысла, причём все части обоих неравенств положительны.

Запись тоже будем вести, записывая перемножаемые неравенства одно под другим:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 20 < x < 21 \\
 \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4} \\
 \hline
 \frac{20}{5} < \frac{x}{y} < \frac{21}{4},
 \end{array}$$

или $4 < \frac{x}{y} < 5,25$. Это и есть оценка для частного $\frac{x}{y}$.



Н

- 1 Закончите предложения.
 - а) $a > b$ в том и только в том случае, когда
 - б) $a < b$ в том и только в том случае, когда
- 2 Закончите предложения.
 - а) Если $a < b$ и $b < c$, то
 - б) Если $a > b$ и $b > c$, то
- 3 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Что такое неравенства одинакового смысла?
 - б) Что такое неравенства противоположного смысла?
 - в) Любые ли неравенства одинакового смысла можно складывать?
 - г) Любые ли неравенства одинакового смысла можно перемножать?
- 4 Закончите предложения.
 - а) Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится
 - б) Если из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получится
- 5 Закончите предложения.
 - а) Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится
 - б) Если обе части верного неравенства разделить на одно и то же положительное число, то получится
- 6 Расскажите, приводя примеры, что произойдёт с верным числовым неравенством, если умножить или разделить обе его части на одно и то же отрицательное число.
- 7 Сложите почленно неравенства:
 - а) $3 < 4$ и $-2 < 1$; в) $\sqrt{3} > 1,7$ и $\sqrt{2} > 1,4$;
 - б) $\frac{11}{2} < 6$ и $-4 < -\frac{7}{2}$; г) $\sqrt{5} > 2,23$ и $\sqrt{6} > 2,44$.
- 8 Перемножьте почленно неравенства:
 - а) $5 < 6$ и $2 < 3$; в) $\sqrt{7} > 2,6$ и $\sqrt{6} > 2,4$;
 - б) $\frac{1}{8} < 1$ и $8 < 10$; г) $\sqrt{11} > 3,3$ и $\sqrt{\frac{1}{11}} > 0,3$.

Н

- 9** Одна сторона прямоугольника заключена в пределах от 2,1 м до 2,2 м, а вторая — в пределах от 3,6 м до 3,7 м. В каких пределах заключены его:
а) периметр (в м); б) площадь (в м²)?
- 10** Оцените объём и площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, длина которого заключена в пределах от 11 см до 12 см, ширина — от 7 см до 8 см, а высота — от 3 см до 4 см.
- 11** Оцените сумму, разность, произведение и частное двух положительных чисел x и y , если:
а) $2 < x < 3$; $1 < y < 2$; в) $10 < x < 20$; $10 < y < 100$;
б) $\frac{1}{3} < x < 3$; $\frac{1}{2} < y < 2$; г) $1 < x < 11$; $2 < y < 12$.
- 12** Зная, что $3,7 < \sqrt{14} < 3,8$, а $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$, оцените:
а) $\sqrt{14} + \sqrt{6}$; б) $\sqrt{14} - \sqrt{6}$.

П

- 13** Известно, что $-2 < x < 1$; $3 < y < 5$. Оцените значения выражений:
а) $x + 2y$; б) $4x - 3y$; в) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$; г) $\frac{y}{2} - 2x$.
- 14** Докажите, что если числа a и b отрицательны и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- 15** Установите, какие утверждения верны.
а) Если $a > 1$, то $a^2 > 1$; в) Если $a^2 > 1$, то $a > 1$;
б) Если $a < 1$, то $a^2 < 1$; г) Если $a^2 < 1$, то $a < 1$.
- 16** Известно, что x — положительное число, отличное от единицы. Докажите, что $x + \frac{1}{x} > 2$.

М

- 17** Используя неравенство треугольника и свойства медиан, докажите, что сумма трёх медиан треугольника:
а) меньше периметра;
б) больше полупериметра;
в) больше трёх четвертей периметра.
- 18** Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей в плоскости многоугольника, до его вершин больше полупериметра этого многоугольника.

- 19 Лёгкий спортивный самолёт два дня подряд с одной и той же собственной скоростью долетал от аэродрома A до одного и того же пункта B , разворачивался над пунктом B , не приземляясь, и возвращался на аэродром A . В первый день было полное безветрие, а во второй день дул с постоянной скоростью ветер в направлении от A к B . В какой из дней полёт занял меньше времени?

2.3

Числовые промежутки



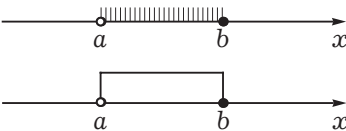
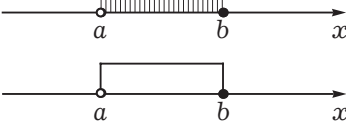
Знакомимся с новыми знаниями

Отметим на числовой прямой две точки a и b (такие, что $a < b$) и рассмотрим множество всех точек, лежащих между ними. В зависимости от того, какие из крайних точек a и b мы включаем в это множество, а какие нет, возможны четыре случая. На рисунках включаемая в множество точка изображается закрашенной, а не включаемая — не закрашенной (говорят также *выколотой*). Сами множества принято изображать с помощью штриховки или «навесов» (говорят также «крыш»). Каждое из четырёх возможных при этом множеств называется *числовым промежутком* или *интервалом*. Отметим, что русское слово «промежуток» и латинское «интервал» мы используем как полные синонимы.

Записывать интервалы можно с помощью двойного неравенства, а также с помощью круглых или квадратных скобок; при этом строгому неравенству ($<$ или $>$) соответствует круглая скобка, а нестроному ($\leq$ или $\geq$) — квадратная.

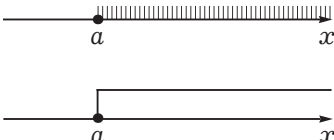
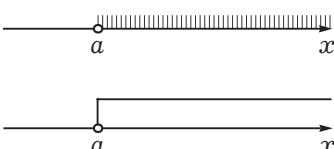
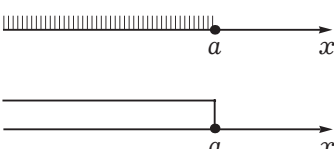
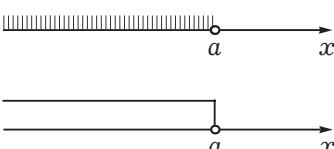
Всё сказанное выше можно увидеть в таблице.

Рисунок	Обозначения
	$a \leq x \leq b$ или $[a; b]$
	$a < x < b$ или $(a; b)$

Рисунок	Обозначения
	$a < x \leq b$ или $(a; b]$
	$a \leq x < b$ или $[a; b)$

Промежуток $(a; b)$ называется *открытым*, промежуток $[a; b]$ — *замкнутым*, а промежутки $(a; b]$ и $[a; b)$ — *полуоткрытыми* (или *полузамкнутыми*). Замкнутый промежуток $[a; b]$ часто называется также *отрезком*.

Рассмотренные выше четыре вида промежутков называются *конечными*. Имеется также четыре вида *полубесконечных* промежутков, которые также называются *лучами*.

Рисунок	Обозначения
	$x \geq a$ или $[a; +\infty)$
	$x > a$ или $(a; +\infty)$
	$x \leq a$ или $(-\infty; a]$
	$x < a$ или $(-\infty; a)$

Обратите внимание: в записи полубесконечных промежутков возле значка $-\infty$ или $+\infty$ всегда стоит круглая скобка.

Наконец, промежутком является вся числовая прямая. Записывается этот промежуток в виде $(-\infty; +\infty)$.

При решении многих задач нам придётся находить объединение и пересечение нескольких промежутков. Это можно делать, изображая эти промежутки на числовой прямой. Если промежутков три или больше, то штриховка становится крайне неудобной, а «навесами» пользоваться удобно, так как их можно рисовать разной высоты. И при нахождении объединения, и при нахождении пересечения используется один и тот же рисунок, только считывается с него разная информация.

Найдём, к примеру, объединение и пересечение промежутков $(1; 4]$ и $(2; 5)$. Изобразим их на числовой прямой с помощью «навесов» разной высоты.

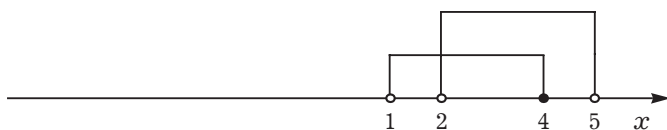


Рис. 31

Объединение промежутков состоит из точек числовой прямой, лежащих хотя бы под одним из «навесов». Образно можно сказать так: если на числовую ось вертикально вниз идёт дождь, то объединение состоит из тех точек, которые останутся сухими.

В рассматриваемом случае: $(1; 4] \cup (2; 5) = (1; 5)$.

Пересечение промежутков состоит из точек числовой прямой, лежащих одновременно под обоими «навесами».

В рассматриваемом случае: $(1; 4] \cap (2; 5) = (2; 4]$.

Пересечение любого количества промежутков является либо промежутком, либо единственной точкой, либо пустым множеством.

Рассмотрим, например, пересечение промежутков $(-\infty; 3]$, $(-2; +\infty)$ и $[3; 6)$.

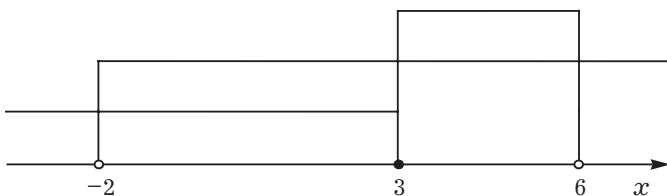


Рис. 32

Из рисунка видно, что одновременно под тремя «навесами» лежит лишь точка 3. Таким образом, $(-\infty; 3] \cap (-2; +\infty) \cap [3; 6) = \{3\}$.

Найдём пересечение промежутков $(-5; 3]$, $[-3; 8]$ и $[6; 9)$.

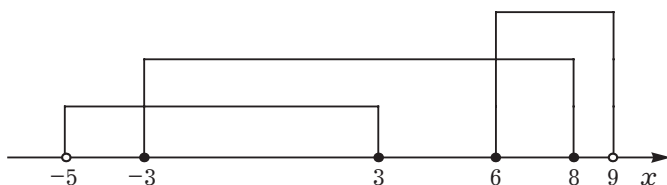


Рис. 33

Из рисунка видно, что нет ни одной точки, лежащей одновременно под тремя «навесами».

Таким образом, $(-5; 3] \cap [-3; 8] \cap [6; 9) = \emptyset$.

Объединение промежутков может не являться промежутком.

Например, найдём объединение промежутков $(-\infty; 0)$ и $[1; 4)$.

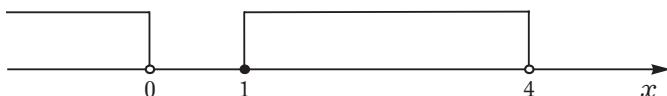


Рис. 34

Ответ записывается в виде: $(-\infty; 0) \cup [1; 4)$.

Допуская вольность речи, можно сказать, что «выражения» вида $(-\infty; 3] \cap (-2; +\infty) \cap [3; 6]$ или $(1; 4) \cup (2; 5)$, рассмотренные выше, «упрощаются», а «выражение» вида $(-\infty; 0) \cup [1; 4)$ — нет.

Развиваем умения



Н

1. Объясните, приводя примеры, что такое:
 - а) интервал;
 - б) конечный интервал;
 - в) полубесконечный интервал.
2. Объясните, приводя примеры, как можно изображать интервалы на числовой прямой.
3.
 - а) Какие синонимы к слову «интервал» вы знаете?
 - б) Какой интервал называется отрезком?
4. Какие конечные интервалы называются:
 - а) открытыми;
 - б) замкнутыми;
 - в) полуоткрытыми;
 - г) полужамкнутыми?

5 Изобразите промежуток на числовой прямой:

- а) $(1; 7)$; в) $[-2; 2]$; д) $(-\infty; -4]$; ж) $(\sqrt{5}; +\infty)$;
 б) $\left[\frac{1}{7}; \frac{1}{6}\right]$; г) $\left[\frac{1}{3}; 8\right]$; е) $[1; +\infty)$; з) $(-\infty; 5,5)$.

6 Запишите в виде интервала, а также в виде неравенства множество точек, изображённое на числовой оси.

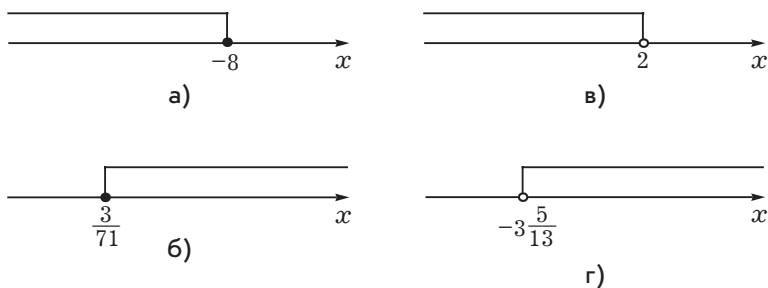


Рис. 35

7 Запишите в виде интервала, а также в виде двойного неравенства множество точек, изображённых на числовой оси.

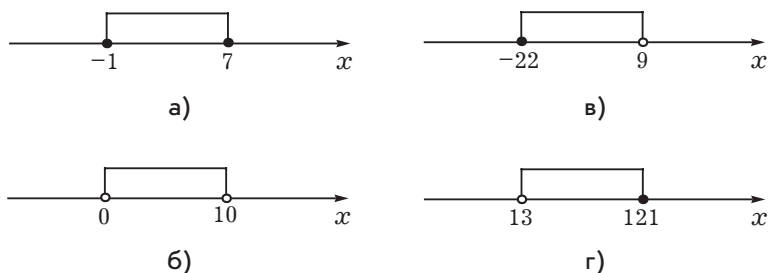


Рис. 36

8 Изобразите на числовой прямой и запишите в виде интервала множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

- а) $x < -5$; б) $x \leq 1$; в) $x > 0,4$; г) $x \geq -\sqrt{2}$.

9 Изобразите на числовой прямой и запишите в виде интервала множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству:

- а) $-3 \leq x < 1$; в) $-7 \leq x \leq 4$; д) $\frac{123}{124} < x < 1$;
 б) $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$; г) $5 - \sqrt{2} \leq x \leq 5 + \sqrt{2}$; е) $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{3}$.

10 Укажите, какие из чисел принадлежат интервалу $[-3; 5,8)$:

- а) -5 ; в) $-\frac{243}{85}$; д) $\frac{146}{25}$; ж) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$;
б) $-3,99$; г) $5,79$; е) $-2-\sqrt{2}$; з) $-2\sqrt{2}$.

11 Укажите, какие из чисел принадлежат интервалу $(-2; -0,5)$:

- а) -2 ; в) $-\frac{144}{49}$; д) $-\frac{242}{195}$; ж) $-\frac{2}{3}\sqrt{7}$;
б) $-\frac{1}{2}$; г) $-1,14$; е) $-0,552$; з) $-\sqrt{2}$.

12 Укажите, какие из чисел принадлежат интервалу $[0; 1]$:

- а) 0 ; в) $\frac{13}{198}$; д) $\frac{197}{42}$; ж) $\frac{1}{4}\sqrt{11}$;
б) 1 ; г) $0,30131$; е) $1,0001$; з) $\sqrt{2}-1$.

13 Укажите все целые числа, принадлежащие интервалу:

- а) $[-4; -1]$; д) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;
б) $(1; 3]$; е) $(\sqrt{2}; \sqrt{11})$;
в) $[-3,32; 4,21]$; ж) $[-\sqrt{5}; \sqrt{7}]$;
г) $\left(-\frac{202}{103}; \frac{202}{103}\right)$; з) $(0; 2\sqrt{6}]$.

14 Укажите наименьшее целое число, принадлежащее интервалу:

- а) $(-2; +\infty)$; д) $[\sqrt{11}; 11\sqrt{11}]$;
б) $[-\sqrt{7}; +\infty)$; е) $(\sqrt{3}; 6)$;
в) $\left(\frac{74}{23}; +\infty\right)$; ж) $\left[-\frac{455}{54}; \frac{1}{54}\right)$;
г) $[12,12; +\infty)$; з) $(-7; 213]$.

15 Укажите наибольшее целое число, принадлежащее интервалу:

- а) $(-\infty; -5)$; в) $\left(-\infty; -\frac{3}{9}\right)$; д) $(\sqrt{2}; \sqrt{5})$; ж) $\left(0; \frac{384}{193}\right]$;
б) $(-\infty; \sqrt{13}]$; г) $\left(-\infty; \frac{107}{13}\right]$; е) $\left[-100; 221\frac{7}{9}\right]$; з) $[-4; \sqrt{2}-2)$.

16 Найдите пересечение интервалов:

- | | |
|----------------------------------|---|
| а) $[2; 6]$ и $(0; 4]$; | д) $[-3; +\infty)$ и $(-\infty; 3]$; |
| б) $[-7; 9]$ и $(-6; 9]$; | е) $(-\infty; 7)$ и $[7; +\infty)$; |
| в) $(0; 1)$ и $(-1; 0,5)$; | ж) $(-\sqrt{2}; +\infty)$ и $(1-\sqrt{2}; +\infty)$; |
| г) $[-3,7; 6]$ и $[-3,6; 5,9]$; | з) $(-\infty; -5)$ и $(-\infty; -3]$. |

17 Найдите объединение интервалов:

- | | |
|----------------------------------|--|
| а) $(1; 5)$ и $(2; 3)$; | д) $(-\infty; 0)$ и $[0; +\infty)$; |
| б) $[1; 3)$ и $(1; 3]$; | е) $(7; +\infty)$ и $[-\sqrt{13}; +\infty)$; |
| в) $[-2,32; 7]$ и $(-3; 5,56]$; | ж) $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $(-\sqrt{3}; 3]$; |
| г) $[1; 2]$ и $[2; 3]$; | з) $(11; +\infty)$ и $(-1; 13)$. |

18 Найдите пересечение интервалов:

- а) $(-4; 8)$, $[-7; 5]$ и $(-\infty; 4]$;
б) $[-2; 11)$, $(0; 3]$ и $(-1; 2)$;
в) $(-\infty; 7)$, $(6; +\infty)$ и $[6; 7]$;
г) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$ и $[-1; 1]$.

19 Найдите объединение интервалов:

- а) $(-\infty; \sqrt{3}]$, $(\sqrt{3}; 2]$ и $(2; +\infty)$;
б) $(-4; 8)$, $[-7; 5]$ и $(-\infty; 4]$;
в) $[-11; 15)$, $[-17; +\infty)$ и $(-20; 15)$;
г) $(2; 3)$, $[3; 100)$ и $(100; +\infty)$.

П

20 Докажите, что пересечение двух интервалов является либо интервалом, либо единственной точкой, либо пустым множеством.

21 Имеется ли в указанном интервале наибольшее число? Наименьшее число? Если да, укажите его; если нет, объясните, почему.

- | | | | |
|----------------|------------------|-----------------------------|----------------------------|
| а) $[-3; 0]$; | в) $(-15; 17]$; | д) $(-\infty; \sqrt{17}]$; | ж) $[-15; +\infty)$; |
| б) $[3; 4)$; | г) $(-5; 7)$; | е) $(-\infty; 1)$; | з) $(\sqrt{6}; +\infty)$. |

22 Существуют ли два таких интервала, объединением которых является интервал, а пересечением — пустое множество? Обоснуйте свой ответ.

23 Верно ли, что любой конечный интервал является пересечением двух полубесконечных интервалов? Обоснуйте свой ответ.

- 24 Верно ли, что в любом интервале содержится:
а) рациональное число; б) иррациональное число?
Обоснуйте свой ответ.
- 25 Верно ли, что в любом открытом интервале содержится некоторый замкнутый интервал? Обоснуйте свой ответ.

2.4

Неравенства с одним неизвестным



Знакомимся с новыми знаниями

Два выражения с одной переменной, соединённые знаком неравенства (строгого: $>$ или $<$, нестрогого: $\geq$ или $\leq$), образуют *неравенство с одной переменной*, или, по-другому, *неравенство с одним неизвестным*. Мы будем чаще пользоваться вторым названием.

Примеры неравенств с одним неизвестным:

$$2x - 6 > 0; \quad (x - 2)(x + 3) \leq (x + 2)(x - 3); \quad \frac{2t - 1}{2t^2 + t - 1} \geq 3.$$

Неизвестное в неравенстве может обозначаться любой буквой, хотя, как и в уравнениях, чаще всего используются малые буквы из конца латинского алфавита.

Решением неравенства с одним неизвестным называется число (значение неизвестного), при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — означает найти все его решения (или убедиться, что их нет).

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются *равносильными*. Заметим, что неравенства, не имеющие решений, являются равносильными — ведь множеством решений каждого из них является пустое множество.

Общий подход к решению многих неравенств аналогичен подходу к решению уравнений. Мы заменяем неравенство равносильным ему неравенством, и делаем это до тех пор, пока не получим неравенство, которое уже умеем решать. Разумеется, для реализации этой программы нужно знать, какие преобразования неравенств приводят к равносильному неравенству.

Три основных вида таких преобразований основаны на свойствах 3 и 4 числовых неравенств, рассмотренных в параграфе 2.2.

I. Если перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное начальному.

II. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом знак неравенства прежним, то получим неравенство, равносильное начальному.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное начальному.

III. Если в любой части неравенства привести входящие в неё подобные слагаемые, то получим неравенство, равносильное начальному.

Убедимся, к примеру, в верности первого из утверждений пункта II (об умножении или делении обеих частей неравенства на одно и то же положительное число).

Будем называть начальное неравенство первым, а неравенство, полученное из него умножением обеих частей на произвольное число $a > 0$, вторым. Предположим, что некоторое число m является решением первого неравенства. При подстановке числа m вместо неизвестного в первое неравенство получим верное числовое неравенство. Умножая обе его части на число $a > 0$, получим (по свойству 4 параграфа 2.2) верное числовое неравенство. Но именно такое же числовое неравенство получится при подстановке числа m вместо неизвестного во второе неравенство! Итак, установлено, что при подстановке числа m вместо неизвестного во второе неравенство получается верное числовое неравенство, то есть число m является решением второго неравенства.

Точно так же, предположив, что некоторое число n является решением второго неравенства, и проведя аналогичные рассуждения, только с делением обеих частей числового неравенства на число $a > 0$, получим, что число n является также решением первого неравенства.

Таким образом, любое решение первого неравенства является также решением второго, и наоборот, любое решение второго неравенства является также решением первого. А это значит, что множества решений первого и второго неравенств совпадают, то есть неравенства равносильны.

Аналогично устанавливается равносильность неравенств и в остальных записанных выше утверждениях.

Классификация неравенств аналогична известной вам классификации уравнений. *Линейным неравенством с одним неизвестным* называют неравенство, левая часть которого представляет собой многочлен первой степени с одним неизвестным, а правая часть является нулём. Такие неравенства ещё называют *неравенствами первой степени с одним неизвестным*.

Квадратным неравенством с одним неизвестным называют неравенство, левая часть которого представляет собой многочлен второй степени с одним неизвестным, а правая часть является нулём. Такие неравенства ещё называют *неравенствами второй степени с одним неизвестным*.

Аналогично можно говорить о неравенствах третьей, четвёртой и т.д. степени. Можно также говорить и о неравенстве нулевой степени (иногда образно говорят: неизвестное «исчезло» из неравенства).

Имеются также неравенства, сводящиеся к линейным или квадратным или неравенствам другой степени.

При решении неравенств с одним неизвестным рекомендуется, как правило, придерживаться следующей последовательности действий.

Если левая и правая части неравенства являются целыми рациональными выражениями, выполняем раскрытие скобок, переносим слагаемые из одной части в другую, умножаем или делим обе части неравенства на ненулевое число (не забывая развернуть знак неравенства, если это число отрицательное), приводим подобные одночлены.

Случаи, когда неравенство в результате таких равносильных преобразований сведётся к линейному, будут рассмотрены в данном параграфе. В данном параграфе будет рассмотрено также «исчезновение» неизвестного в целом рациональном неравенстве. Квадратные неравенства будут рассмотрены в параграфах 2.5 и 2.6, а остальные целые рациональные неравенства, а также дробные рациональные неравенства — в параграфе 2.7.

Рассмотрим несколько примеров решения неравенств, сводящихся к линейным.

Пример 1. Решим неравенство: $7x + 2 > 5$.

Перенесём слагаемое 2 в правую часть неравенства, изменив его знак на противоположный:

$$7x > 5 - 2.$$

Выполним вычитание в правой части:

$$7x > 3.$$

Разделим обе части неравенства на положительное число 7:

$$x > \frac{3}{7}.$$

Запишем ответ. Это можно сделать по-разному.

$$\text{Можно так: } \left(\frac{3}{7}; +\infty \right).$$

$$\text{Можно так: } x \in \left(\frac{3}{7}; +\infty \right).$$

$$\text{Можно так: } x > \frac{3}{7}.$$

Все формы записи ответа хороши, ни одна из них ничем не «хуже» и не «лучше» остальных, и какую из них выбрать — дело вкуса.

Такие подробные комментарии, как при решении разобранного неравенства, обычно не пишутся, запись ведётся кратко, примерно так:

$$7x + 2 > 5;$$

$$7x > 5 - 2;$$

$$7x > 3; \quad | : 7 > 0$$

$$x > \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решим неравенство: $7(1-2x) + 2(x+2) \leq 3x - 4$.

Раскроем скобки в левой части, после чего перенесём слагаемые, содержащие x в левую часть, а числовые слагаемые — в правую:

$$7(1-2x) + 2(x+2) \leq 3x - 4;$$

$$7 - 14x + 2x + 4 \leq 3x - 4;$$

$$-14x + 2x - 3x \leq -4 - 7 - 4;$$

$$-15x \leq -15; \quad | : (-15) < 0$$

$$x \geq 1.$$

Ответ: $[1; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство: $\frac{(3x-1)(x-2)}{3} - \frac{(2x-1)(x-3)}{2} > 1$.

Здесь совсем не очевидно, сведётся ли неравенство к линейному или нет. Но нас это не должно заботить — преобразования целых рациональных неравенств на начальной стадии одинаковы. Раскроем скобки в левой части, после чего избавимся от дробей, умножив обе части неравенства на их общий знаменатель 6 (возможно, кому-то больше понравится сделать эти два преобразования в обратном порядке):

$$\frac{3x^2 - 6x - x + 2}{3} - \frac{2x^2 - 6x - x + 3}{2} > 1;$$

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{3} - \frac{2x^2 - 7x + 3}{2} > 1;$$

$$6x^2 - 14x + 4 - (6x^2 - 21x + 9) > 6;$$

$$\cancel{6x^2} - 14x + 4 - \cancel{6x^2} + 21x - 9 > 6;$$

$$-14x + 21x > 6 - 4 + 9;$$

$$7x > 11 \quad | : 7 > 0;$$

$$x > \frac{11}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{11}{7}; +\infty \right).$$

Рассмотрим также «исчезновение» неизвестного в неравенстве.

Пример 4. Решим неравенство: $3(3x - 7) - 5(x - 1) \geq 4(x - 5)$.

Как обычно, раскроем скобки в левой части, после чего перенесём слагаемые, содержащие x , в левую часть, а числовые слагаемые — в правую.

$$9x - 21 - 5x + 5 \geq 4x - 20;$$

$$9x - 5x - 4x \geq -20 + 21 - 5;$$

$$0 \cdot x \geq -4.$$

При подстановке в последнее неравенство любого действительного значения x получается верное числовое неравенство $0 \geq -4$. Значит, любое действительное число x является решением этого неравенства.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Или запишем ответ так: x — любое действительное число.

Завершающую стадию решения разобранный неравенства так подробно не расписывают и искусственную «недопреобразованную» конструкцию $0 \cdot x$ не пишут. Запись ведётся примерно так:

$$3(3x - 7) - 5(x - 1) \geq 4(x - 5);$$

$$9x - 21 - 5x + 5 \geq 4x - 20;$$

$$9x - 5x - 4x \geq -20 + 21 - 5;$$

$$0 \geq -4.$$

Получили верное числовое неравенство.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 5. Решим неравенство: $(4x - 3)(3x - 1) < (3x - 4)(4x + 1)$.

Раскроем скобки в правой и левой частях, после чего перенесём слагаемые, содержащие x , в левую часть, а числовые слагаемые — в правую:

$$12x^2 - 4x - 9x + 3 < 12x^2 + 3x - 16x - 4;$$

$$12x^2 - 4x - 9x - 12x^2 - 3x + 16x < -4 - 3;$$

$$0 < -7.$$

(Мы не стали писать в левой части уж совсем надуманную конструкцию $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x$, а сразу записали 0.)

Последнее числовое неравенство получится при подстановке в начальное неравенство любого действительного значения x . А поскольку это неверное числовое неравенство, то нет такого действительного числа x , при подстановке которого в начальное неравенство получилось бы верное числовое неравенство. Значит, решений неравенство не имеет.

Ответ: Нет решений.

Или запишем ответ так: $\emptyset$.

Краткая запись обычно ведётся так:

$$\begin{aligned}(4x-3)(3x-1) &< (3x-4)(4x+1); \\ 12x^2 - 4x - 9x + 3 &< 12x^2 + 3x - 16x - 4; \\ 12x^2 - 4x - 9x - 12x^2 - 3x + 16x &< -4 - 3; \\ 0 &< -7.\end{aligned}$$

Получили неверное числовое неравенство.

Ответ: Нет решений.

Развиваем умения



Н

- 1 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Что такое неравенство с одним неизвестным?
 - б) Какое число называется решением неравенства с одним неизвестным?
 - в) Что значит решить неравенство с одним неизвестным?
- 2 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Что такое равносильные неравенства с одним неизвестным?
 - б) При каких преобразованиях неравенства получается равносильное ему неравенство?
 - в) Что значит решить неравенство с одним неизвестным?
- 3 Расскажите, приводя примеры, какое неравенство называется:

а) линейным;	в) неравенством третьей степени;
б) квадратным;	г) неравенством нулевой степени.
- 4 Расскажите, приводя примеры, как поступать, если при решении целого рационального неравенства неизвестное «исчезло»?
- 5 Какие из чисел являются решениями неравенства $x^2 - 3x \geq 2$:

а) 2;	в) 33;	д) 3,1;	ж) $\frac{277}{83}$;
б) $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})$;	г) $-\frac{121}{40}$;	е) $\sqrt{2}$;	з) $-0,6$;

6 Решением каких неравенств является число $\frac{2}{3}$:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| а) $x^2 - 3x + 1 < 0$; | д) $\frac{5x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$; |
| б) $\frac{x}{x - 2} < 0$; | е) $x^2 - 11x - 1 < 0$; |
| в) $5x^2 + 6x - 5 > 0$; | ж) $9x^2 + x - 13 > 0$; |
| г) $\frac{2x + 1}{3x - 1} \geq 2$; | з) $\left(x - \frac{2}{3}\right) \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1} > 0$? |

7 Решите неравенство:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| а) $4x - 2 \leq 7$; | д) $-4 - 5x \leq -5$; |
| б) $-1 - 7x < 5$; | е) $-10x \geq 8$; |
| в) $-3 + 7x \geq -4$; | ж) $10x - 9 > 9$; |
| г) $3x - 10 > 2$; | з) $8 - 2x < 4$. |

8 Решите неравенство:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| а) $4y - 3 < 5y + 6$; | д) $7 - 10x > -8 - x$; |
| б) $-5 + 6t \geq 7 - 5t$; | е) $10 - 9r \leq -4 + 5r$; |
| в) $4 - 7a \leq 10 - 10a$; | ж) $-5 + 6t \geq 7 - 5t$; |
| г) $9m + 3 > 8m + 1$; | з) $-8 - 4g < g + 3$. |

Н

9 Решите неравенство:

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| а) $\frac{2x - 3}{4} \leq 1$; | д) $\frac{2 - 3x}{4} < 1$; |
| б) $\frac{-4 - 6x}{6} \geq 1$; | е) $\frac{8x - 8}{9} \geq -3$; |
| в) $\frac{10 + 6x}{10} < -6$; | ж) $\frac{8x - 10}{9} \leq 10$; |
| г) $\frac{3x - 8}{7} > -9$; | з) $\frac{4x - 9}{8} > -2$. |

10 Решите неравенство:

- | | |
|---|---|
| а) $\frac{m - 3}{2} < 5 - m$; | в) $\frac{-3 - t}{2} \leq \frac{2t - 3}{9}$; |
| б) $\frac{8 + 5k}{2} \geq \frac{1 + 9k}{4}$; | г) $\frac{1 - 3s}{8} > -s$; |

$$д) \frac{10+2p}{6} > \frac{9-7p}{8};$$

$$ж) \frac{10y-6}{4} \geq \frac{-8-y}{5};$$

$$е) f+8 \leq \frac{8-6f}{3};$$

$$з) \frac{4+3w}{4} < \frac{2w+7}{3}.$$

11 Решите неравенство:

$$а) 4(2x-1)+5(2-3x) > 3x-5;$$

$$д) 5(-3-9f)+8(6f-10) > -3f;$$

$$б) 9(3+3z)-8(8+4z) < 3z-3;$$

$$е) -5(1+h)-2(4h+5) < -3-6h;$$

$$в) 6(-10-7t)-6(-6+9t) \geq 9-3t;$$

$$ж) 10(2,5v-2)-4(7v-8) \geq -3v;$$

$$г) 3(1-5g)+10(3g-2) \leq g-5;$$

$$з) 3(8b-10)+5(3+9b) \leq 1-9b.$$

12 Решите неравенство:

$$а) \frac{2x-5}{2} + \frac{3x-4}{3} > x-1;$$

$$д) \frac{4w+3}{5} + \frac{7w+45}{35} > w-2;$$

$$б) \frac{7-10r}{10} - \frac{3r}{2} < 4r+10;$$

$$е) -\frac{8+10l}{2} + \frac{4-9l}{4} < 10-8l;$$

$$в) \frac{2z-6}{5} + \frac{10z-5}{9} \leq -9-z;$$

$$ж) \frac{d}{3} - \frac{3d+3}{7} \leq 4-8d;$$

$$г) \frac{-1-9t}{4} + \frac{2t-2}{6} \geq 4t+1;$$

$$з) \frac{8g+9}{5} + \frac{30+16g}{40} \geq 2g+10.$$

13 Решите неравенство:

$$а) (2x+5)(x-4)+(3x-1)(x+2) > 5x^2-2x-7;$$

$$б) (-9-15i)(7-8i)+(3+i)(3+14i) < 134i^2-1;$$

$$в) 17x(13-4x)+(13-3x)(13+13x) \geq 168-107x^2+350x;$$

$$г) -6v(4+2v)+(v-3)(9v-12) \leq 37-63v-3v^2;$$

$$д) (3y-2)(14y-18)+(20+8y)(16y-8) > 170y^2+150y;$$

$$е) -(4s+3)(15-3s)+(8-4s)(1-s) < 16s^2-63s-37;$$

$$ж) (7-4h)(12-2h)-(11+13h)(4+h) \geq 25-120h-5h^2;$$

$$з) (14-3u)(3u-7)+(16-19u)(8+10u) \leq 12-199u^2+69u.$$

14 а) При каких значениях переменной a значение двучлена $3a-4$ больше значения двучлена $4a-3$?

б) При каких значениях переменной b значение двучлена $7+6b$ меньше значения двучлена $6+b$?

в) При каких значениях переменной c значение двучлена $5-2c$ не больше значения двучлена $4c-1$?

- г) При каких значениях переменной m значение двучлена $4 - 2m$ не меньше значения двучлена $3m - 10$?
- д) При каких значениях переменной n значение двучлена $1 + 4n$ не превосходит значения двучлена $-4 - 3n$?
- 15** а) При каких значениях переменной a значение дроби $\frac{5a-1}{4}$ больше значения дроби $\frac{4a-5}{3}$?
- б) При каких значениях переменной b значение дроби $\frac{3b^2-2b-5}{3}$ меньше значения многочлена $b^2 + 2b - 2$?
- в) При каких значениях переменной c значение многочлена $1 + 3c - 5c^2$ не больше значения дроби $\frac{15c^2-9c-2}{-3}$?
- г) При каких значениях переменной m значение дроби $\frac{9-8m}{5}$ не меньше значения дроби $\frac{3+56m}{-35}$?
- д) При каких значениях переменной n значение дроби $\frac{9n-5}{2}$ не превосходит значения двучлена $2 - 3n$?
- 16** Найдите наибольшее целое решение неравенства:
- а) $7(0,4 - 1,1x) - 3x > 5,2$; в) $-\frac{10+2r}{3} - \frac{2+2r}{9} \leq \frac{3-7r}{6}$;
- б) $\frac{8-9v}{9} + \frac{10+8v}{4} < \frac{4-9v}{2}$; г) $-0,5(8+7l) + 0,25(7l-9) \geq 0,2(4-5l)$.
- 17** Найдите наименьшее целое решение неравенства:
- а) $\frac{5u-9}{10} + \frac{8u-1}{3} > \frac{6+10u}{4}$;
- б) $0,14(9-9s) + 0,125(5-2s) \leq 0,125(3-10s)$;
- в) $\frac{9}{4}(1-m) + \frac{m-2}{8} < \frac{1}{2}(m-1)$;
- г) $0,25(9,1+5p) + 0,12(1+7,1p) \geq -0,111(7,5+6,2p)$.
- 18** а) При каких значениях переменной a разность дробей $\frac{5a-7}{6}$ и $\frac{1-6a}{5}$ отрицательна?
- б) При каких значениях переменной b сумма дробей $\frac{b-5}{3b-6}$ и $\frac{b+3}{5b-10}$ положительна?
- в) При каких значениях переменной c сумма дробей $\frac{3c-20}{4c+3}$ и $\frac{37-10c}{6+8c}$ неотрицательна?
- г) При каких значениях переменной d разность дробей $\frac{-8-4d}{3+2d}$ и $\frac{5-8d}{6+4d}$ неположительна?

19 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a-3}$;	в) $\sqrt{\frac{5p}{4}}$;	д) $\sqrt{\frac{-2m}{3}}$;	ж) $\sqrt{-2-10c}$;
б) $\sqrt{-4+9z}$;	г) $\sqrt{\frac{9w-5}{7}}$;	е) $\sqrt{\frac{2}{9}-\frac{7}{8}w}$;	з) $\sqrt{10+8m}$?

20 Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-6}$;	д) $y = \sqrt{\frac{2-3x}{5}}$;
б) $y = \sqrt{\frac{x-3}{7}}$;	е) $y = \sqrt{2x+\sqrt{2}}$;
в) $y = \sqrt{\frac{-4-7x}{2}}$;	ж) $y = \sqrt{\frac{\sqrt{7}x-2}{\sqrt{3}}}$;
г) $y = \sqrt{10+3x}$;	з) $y = \sqrt{-\sqrt{5}-2x}$.

21 Докажите, что если в любой части неравенства привести входящие в неё подобные одночлены, то получим неравенство, равносильное начальному.

22 При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения? Проиллюстрируйте ответ с помощью графика.

а) $y = -3x - 2$;	б) $y = \frac{5-7x}{2}$.
--------------------	---------------------------

23 При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения? Проиллюстрируйте ответ с помощью графика.

а) $y = 2x - 1$;	б) $y = -0,5 + x$.
-------------------	---------------------

24 При каких значениях аргумента функция принимает неотрицательные значения? Проиллюстрируйте ответ с помощью графика.

а) $y = -2x + 1,7$;	б) $y = 1 - 8x$.
----------------------	-------------------

25 При каких значениях аргумента функция принимает неположительные значения? Проиллюстрируйте ответ с помощью графика.

а) $y = 4x + 13$;	б) $y = -2t - \frac{3}{8}$.
--------------------	------------------------------

26 При каких значениях x верно равенство:

а) $|4x - 8| = 4x - 8$;

б) $|x + 4| = -x - 4$?

27 При каких значениях a уравнение имеет положительный корень x :

а) $2x = 4a - 1$;

б) $4x - 5 = \frac{7a - 3}{7}$?

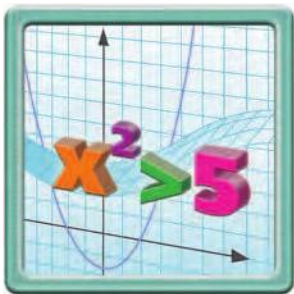
28 При каких значениях c уравнение имеет отрицательный корень x :

а) $3x - 5c = 2$;

б) $4x - \frac{2b - 7}{3} = \frac{9b - 10}{5}$?

2.5

Решение квадратных неравенств графическим методом



Вспоминаем то, что знаем

● Постройте график квадратичной функции

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Открываем новые знания

● С помощью построенного ранее графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ ответьте на вопросы:

- а) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?
- б) при каких значениях x выполняется неравенство $x^2 - 4x + 3 > 0$?
- в) при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?
- г) при каких значениях x выполняется неравенство $x^2 - 4x + 3 < 0$?



Как решить квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с помощью графика функции $y = ax^2 + bx + c$?

Как решить квадратное неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ с помощью графика функции $y = ax^2 + bx + c$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В предыдущем параграфе мы научились решать линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к линейным, а также рассмотрели ситуацию «исчезновения» неизвестного в целом рациональном неравенстве. В данном параграфе мы научимся решать любое квадратное неравенство. Напомним, что левая часть квадратного неравенства представляет собой многочлен второй степени с одним не-

известным, а правая часть является нулём. Другими словами, квадратное неравенство имеет один из четырёх следующих видов (напомним, что $a \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Более того, если старший коэффициент a в квадратном неравенстве отрицателен, то, умножая обе части такого неравенства на -1 , мы можем сделать его положительным. Настоятельно рекомендуем выполнять это преобразование, поскольку дальнейшая работа от этого упрощается.

Сначала мы научимся решать квадратные неравенства с помощью графика соответственной квадратичной функции.

Решим, к примеру, неравенство: $x^2 - 2x - 8 < 0$.

Построим для этого график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 8$. Пока будем делать это, как обычно:

1) Найдём абсциссу вершины: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.

Найдём ординату вершины, подставляя абсциссу вершины в формулу $y = x^2 - 2x - 8$. Получим: $y_B = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$.

2) Поскольку старший коэффициент (равный 1) положительный, ветви параболы направлены вверх.

3) Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс (это обязательный и очень важный момент при решении квадратного неравенства):

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36, x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}, \text{ то есть } x_1 = -2, x_2 = 4.$$

Теперь рисуем график:

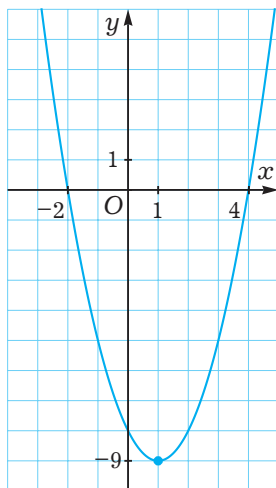


Рис. 37

Решить неравенство $x^2 - 2x - 8 < 0$ геометрически — значит найти такие значения аргумента x , при которых функция $y = x^2 - 2x - 8$ принимает отрицательные значения, или, по-другому, при которых парабола $y = x^2 - 2x - 8$ лежит ниже оси абсцисс (в нижней полуплоскости).

Из графика хорошо видно, что это любые значения x , находящиеся между нулями квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 8$, то есть между точками -2 и 4 . Таким образом, можем записать ответ: $x \in (-2; 4)$.

Обратите внимание, что нарисованный график позволяет решить все четыре вида квадратных неравенств с левой частью $x^2 - 2x - 8$.

Скажем, при решении неравенства $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ мы будем интересоваться, при каких значениях аргумента x парабола $y = x^2 - 2x - 8$ лежит ниже оси абсцисс или на оси абсцисс. Понятно, что к точкам, лежащим между нулями квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 8$, то есть между точками -2 и 4 , добавятся ещё сами эти нули, то есть точки -2 и 4 . В результате получится ответ: $x \in [-2; 4]$.

При решении неравенства $x^2 - 2x - 8 > 0$ мы будем интересоваться, при каких значениях аргумента x парабола $y = x^2 - 2x - 8$ лежит выше оси абсцисс (в верхней полуплоскости). Из графика хорошо видно, что это любые значения x , лежащие левее меньшего нуля квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 8$, то есть левее точки -2 , а также любые значения x , лежащие правее большего нуля, то есть правее точки 4 . Таким образом, можем записать ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Наконец, при решении неравенства $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ мы будем интересоваться, при каких значениях аргумента x парабола $y = x^2 - 2x - 8$ лежит выше оси абсцисс или на оси абсцисс. Понятно, что к ранее найденным решениям неравенства $x^2 - 2x - 8 > 0$ добавятся ещё нули квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 8$, то есть точки -2 и 4 . В результате получится ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

Внимательный анализ показывает, что при решении рассмотренных квадратных неравенств нам не понадобились ни координаты вершины параболы, ни даже аккуратно построенный график. Основная информация, которой мы пользовались, — это нули квадратичной функции, направление ветвей параболы и тот факт, строгое или нестрогое неравенство мы решаем.

При решении квадратных неравенств поступают следующим образом:

1) Если старший коэффициент отрицательный, переписывают неравенство так, чтобы он стал положительным.

2) Находят корни квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства (или убеждаются, что их нет).

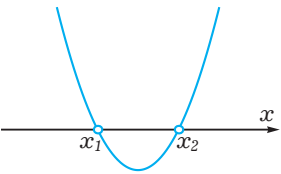
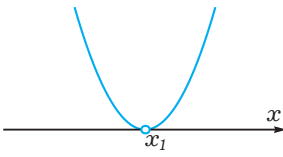
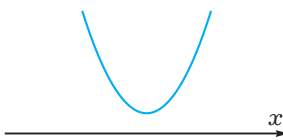
3) Изображают горизонтальную ось x и наносят на неё корни, если они есть, причём выколотыми точками в случае строгого неравенства и закрашенными в случае нестроого.

4) Рисуют схематически параболу с ветвями, направленными вверх. Если корней два, то эта парабола проходит через соответствующие точки на оси x . Если корень один, то парабола касается оси x в соответствующей точке. Если корней нет, то парабола не пересекает ось x (в этом случае иногда образно говорят, что парабола «висит» или «парит» над осью).

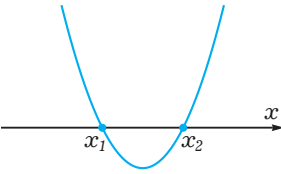
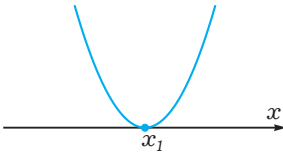
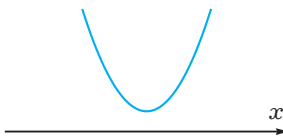
5) Рассматривая рисунок, выписывают ответ.

Описанный метод называют *графическим методом решения квадратных неравенств*, или *методом схематической параболы*.

Скажем, при решении строгого квадратного неравенства может возникнуть один из следующих трёх рисунков (ещё раз напомним, у нас $a > 0$).

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
		
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c > 0$:		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$:		
$(x_1; x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$

При решении нестрогого квадратного неравенства может возникнуть ещё три возможных рисунка (как и ранее, у нас $a > 0$).

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
		
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$:		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Ответ для неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$:		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим неравенство: $-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 < 0$.

Поскольку старший коэффициент отрицательный, умножим обе части неравенства на -4 (так мы заодно избавимся от дробей). Получим неравенство:

$x^2 - 4x + 4 > 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 4$. Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, то корень единственный, $x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = 2$. Рисуем горизонтальную ось x и наносим на неё точку 2, причём выколотую (поскольку неравенство строгое), затем рисуем схематическую параболу с вершиной в этой точке (поскольку корень единственный).

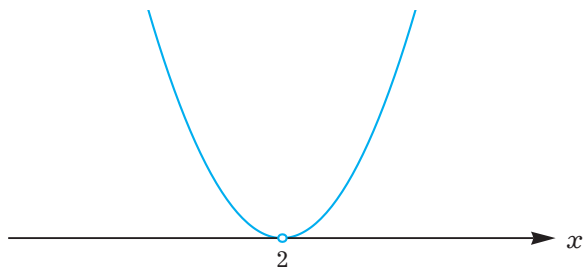


Рис. 38

Нас интересует, при каких x параболы лежит выше оси. Из рисунка видим, что это все x , кроме точки 2.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Замечание: Решая с помощью этого же рисунка строгое неравенство $x^2 - 4x + 4 < 0$, мы интересовались бы, при каких x параболы лежит ниже оси, и обнаружили бы, что таких x нет.

Для неравенства $x^2 - 4x + 4 < 0$ ответ: $\emptyset$.

Пример 2. Решим неравенство: $3x^2 - 9x + 7 \leq 0$.

Здесь старший коэффициент положительный, поэтому сразу переходим к нахождению корней квадратного трёхчлена $3x^2 - 9x + 7$ (кстати, многие предпочитают говорить: «корней соответственного квадратного уравнения»). $D = (-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 81 - 84 < 0$, значит, корней нет.

Рисуем горизонтальную ось x и затем не пересекающую её схематическую параболу с ветвями, направленными вверх.

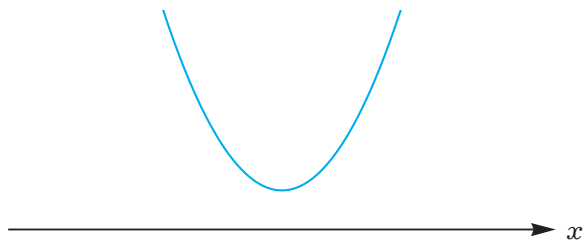


Рис. 39

Нас интересует, при каких x парабола лежит ниже оси или пересекает ось. Из рисунка видим, что таких x нет.

Ответ: $\emptyset$.

Замечание 1: В случае, когда парабола не пересекает ось, один и тот же рисунок позволяет решать и строгие, и нестрогие неравенства. Сделаем это для нашего рисунка.

Для неравенства $3x^2 - 9x + 7 < 0$ ответ: $\emptyset$.

Для неравенства $3x^2 - 9x + 7 > 0$ ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Для неравенства $3x^2 - 9x + 7 \geq 0$ ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Замечание 2: Иногда образно говорят: «Если у квадратного неравенства дискриминант отрицательный, то ответ — либо «всё», либо «ничего».

Пример 3. Решим неравенство: $x^2 > 5$.

При решении предыдущих неравенств мы расписывали каждый шаг очень подробно. Это неравенство мы решим, используя краткую запись — как обычно, делается в тетради:

$$x^2 > 5;$$

$$x^2 - 5 > 0.$$

Корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.

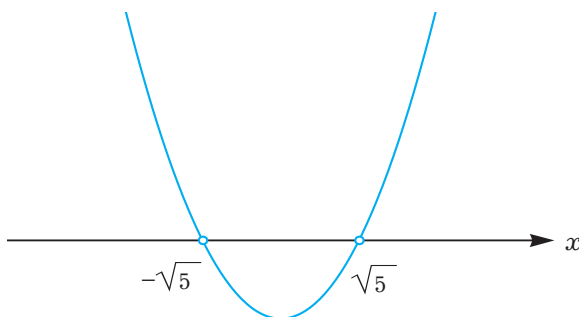


Рис. 40

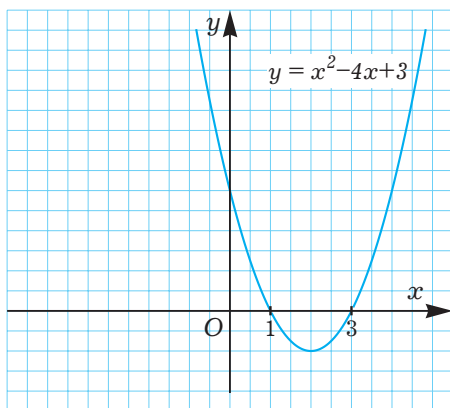
Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство: $x^2 - 4|x| + 3 > 0$.

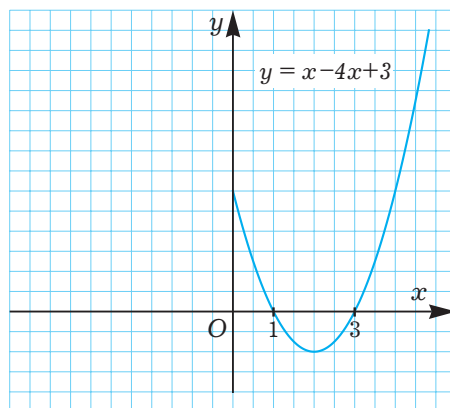
Применим графический метод. Построим график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. Прежде всего, заметим, что эта функция чётная, поскольку $y(-x) = (-x)^2 - 4|-x| + 3 = x^2 - 4|x| + 3 = y(x)$. Значит, график этой функции симметричен относительно оси Oy .

Далее, поскольку $|x| = x$ при $x \geq 0$, то $x^2 - 4|x| + 3 = x^2 - 4x + 3$ при $x \geq 0$, а значит, график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ при $x \geq 0$ совпадает с графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$, который мы строить умеем.

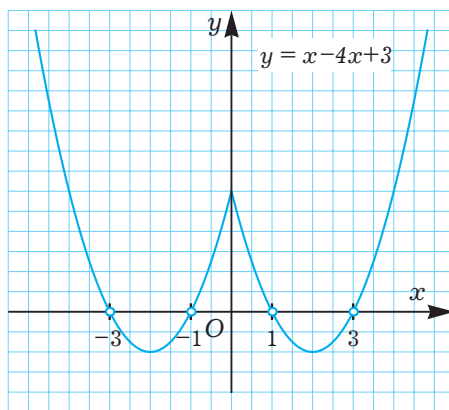
Таким образом, сначала строим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ (рис. 41а), затем берём часть этого графика, лежащую в правой полуплоскости, то есть при $x \geq 0$ (рис. 41б), и наконец симметрично отражаем эту часть относительно оси Oy (рис. 41в). В результате мы получим график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. Так как мы будем решать с помощью этого графика строгое неравенство $x^2 - 4|x| + 3 > 0$, то точки пересечения графика с осью Ox на рис. 41в изображены выколотыми.



а)



б)



в)

Рис. 41

Теперь осталось посмотреть, при каких значениях x график лежит выше оси Ox , и выписать ответ.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.



Н

- 1 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Как решать квадратное неравенство методом схематической параболы?
 - б) Обязательно ли находить координаты вершины параболы при решении квадратного неравенства графическим методом?
- 2 Каким может быть множество решений квадратного неравенства при отрицательном дискриминанте?
- 3 Может ли множество решений квадратного неравенства состоять из единственной точки? Если да, приведите пример такого неравенства. Если нет, объясните, почему.
- 4 Может ли множество решений строгого квадратного неравенства являться отрезком? Если да, приведите пример такого неравенства. Если нет, объясните, почему.
- 5 Решите квадратные неравенства методом схематической параболы:

а) $-x^2 \geq 0$;	в) $x^2 > -4$;	д) $x^2 > 1$;	ж) $-x^2 < 9$;
б) $x^2 \leq 16$;	г) $-x^2 \leq 2$;	е) $-x^2 < -4$;	з) $x^2 \geq 121$.

Н

- 6 Решите квадратное неравенство методом схематической параболы:

а) $-x^2 + 2x \geq 0$;	д) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$;
б) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$;	е) $-5x^2 - 4x - 7 \leq 0$;
в) $-x^2 + 4x + 12 > 0$;	ж) $x^2 - 14x + 48 > 0$;
г) $5x^2 + 6x + 4 < 0$;	з) $-x^2 + 6x - 8 < 0$.
- 7 Решите квадратное неравенство методом схематической параболы:

а) $-2x^2 + 2x - 3 > 0$;	д) $13x^2 - 8x + 14 > 0$;
б) $4x^2 \leq 3$;	е) $-4x^2 + 10x - 20 \leq 0$;
в) $x^2 - \frac{17}{2}x - \frac{9}{2} \geq 0$;	ж) $-9x^2 + 82x + 80 \geq 0$;
г) $-8x^2 + 10x + 7 < 0$;	з) $x^2 - \frac{9x}{7} - \frac{10}{7} < 0$.
- 8 Решите квадратное неравенство:

а) $15x^2 + 20x + 2 \leq 0$;	б) $-6x^2 - 19x - 2 \geq 0$;
-------------------------------	-------------------------------

$$в) 4x^2 - x + 2 < 0;$$

$$е) -16x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{27}{8} \geq 0;$$

$$г) \frac{4}{7}x^2 - \frac{1}{21}x - \frac{1}{6} > 0;$$

$$ж) 9x^2 - 14x - 5 < 0;$$

$$д) \frac{45}{8}x^2 + \frac{31}{6}x - \frac{16}{9} \leq 0;$$

$$з) -\frac{32}{15}x^2 - \frac{71}{90}x + \frac{1}{24} > 0.$$

9 Решите неравенство:

$$а) (x-3)(x+5) < 20;$$

$$д) \left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{7}\right) < 78;$$

$$б) (x-1)\left(x + \frac{5}{8}\right) \leq 1;$$

$$е) (x-1)\left(x - \frac{2}{5}\right) \leq 1;$$

$$в) \left(\frac{9}{5} - \frac{2x}{7}\right)\left(5x - \frac{10}{7}\right) > -53;$$

$$ж) \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{9}{8} + x\right) > -2;$$

$$г) \left(\frac{8}{5} - 3x\right)\left(\frac{8x}{3} - \frac{7}{8}\right) \geq -\frac{7}{5};$$

$$з) \left(x + \frac{1}{2}\right)(2-x) \geq 3.$$

10 Решите неравенство:

$$а) \frac{(2x-5)(x+6)}{3} \geq \frac{(3x+5)(x-8)}{4};$$

$$б) \left(-5 - \frac{x}{6}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) > \left(\frac{1}{8} - \frac{8x}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{2}\right) - \frac{19}{2};$$

$$в) \left(\frac{x}{10} - 1\right)\left(\frac{4x}{5} - \frac{3}{2}\right) < \left(\frac{3x}{8} - \frac{10}{7}\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{3x}{4}\right) - 79;$$

$$г) 3x\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(5 + \frac{x}{10}\right)\left(1 + \frac{x}{6}\right)\left(\frac{1}{7} + x\right) \leq -\frac{1}{60}x^3 - \frac{181}{80};$$

$$д) \left(\frac{5}{4} + \frac{3x}{2}\right)(3+x)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{4}{5} - x\right)\left(\frac{2x}{7} - \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{9}{5}\right) + \frac{25}{14}x^3 + \frac{867}{100};$$

$$е) \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)(2+x) \geq -\frac{7}{3}\left(x - \frac{8}{5}\right)x + 7;$$

$$ж) \left(x - \frac{5}{3}\right)(x-1) < \frac{x}{2}\left(\frac{4}{5} + x\right) - \frac{3}{40};$$

$$з) \left(\frac{3}{2} - \frac{7x}{2}\right)\left(\frac{8}{7} + x\right) - 4 > \left(\frac{3}{4} - \frac{6x}{7}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{9}\right).$$

11 Решите неравенство:

$$а) (x-3)(x-4) < 0;$$

$$в) x(x+5) \leq 0;$$

$$б) (x+2)(x-1) > 0;$$

$$г) (x + \sqrt{3})(x - 2,4) \geq 0.$$

12 Решите неравенство:

- а) $(x-3)^2 > 0$; в) $(x+5)^2 < 0$;
б) $(3x+2)^2 \leq 0$; г) $(2x+\sqrt{7})^2 \geq 0$.

П

13 Перечислите все возможные множества, которые могут являться решением квадратного неравенства.

14 Какие из перечисленных множеств не могут являться решением никакого квадратного неравенства? Обоснуйте свой ответ.

- а) $(-10; 1)$; д) $(1; 2) \cup (3; +\infty)$;
б) $[2; 3)$; е) $(-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$;
в) $(-\infty; 5]$; ж) $(0; 1) \cup (2; 3)$;
г) $\{1\}$; з) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

М

15 Решите графическим методом неравенство:

- а) $x^2 - 5|x| + 4 \geq 0$; б) $x^2 - 8|x| - 9 \leq 0$.

16 а) Известно, что квадратичная функция $y(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных нуля x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Докажите, что число m лежит между нулями, то есть $x_1 < m < x_2$ в том и только в том случае, когда $y(m) < 0$.

б) Известно, что квадратичная функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных нуля x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Докажите, что число m лежит между нулями квадратичной функции, то есть $x_1 < m < x_2$ в том и только в том случае, когда $a \cdot y(m) < 0$.

17 При каких значениях h неравенство имеет единственное решение:

- а) $x^2 - 6x + h \leq 0$; в) $hx^2 - x + h \leq 0$;
б) $3x^2 - 5hx + 3 \leq 0$; г) $hx^2 - x + h + 1 < 0$?

18 При каких значениях s неравенство справедливо при всех действительных x :

- а) $x^2 + 4x + s > 0$; в) $3x^2 - 2sx + s \leq 0$;
б) $9x^2 - sx + 1 \geq 0$; г) $sx^2 - 7x - s > 0$?



Вспоминаем то, что знаем

- Расскажите, при каком условии квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на линейные множители. Как это сделать?
- Разложите на линейные множители многочлены:
- а) $x^2 + 2x - 8$; б) $-2x^2 - 7x + 9$.

Открываем новые знания

- Закончите рассуждения при решении неравенства $(x-1)(x-8) < 0$.

Нанесём на ось x точки 1 и 8 (те точки, в которых равен нулю один из сомножителей в левой части неравенства). При $x > 8$ каждый сомножитель — и $(x-1)$, и $(x-8)$ — положителен, следовательно, их произведение тоже положительно. При $1 < x < 8$ сомножитель $(x-1)$ положителен, а сомножитель $(x-8)$ отрицателен, следовательно, их произведение отрицательно.



Как решить квадратное неравенство, разложив квадратный трёхчлен на множители?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В этом параграфе мы обсудим другой метод решения квадратных неравенств. Он называется методом *интервалов* и основан на разложении квадратного трёхчлена на линейные множители (если это возможно). Далее, в следующем параграфе мы выясним, что методом интервалов можно решать, кроме квадратных, и другие рациональные неравенства — как целые, так и дробные.

Решим для начала неравенство: $x^2 - 7x + 10 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена в левой части равен 9, а его корни равны $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Таким образом, $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, и неравенство переписывается в виде: $(x-2)(x-5) > 0$.

Нарисуем горизонтальную ось x и нанесём на неё корни квадратного трёхчлена — точки 2 и 5, причём выколотые (так как неравенство строгое).

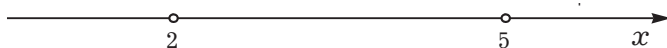


Рис. 42

Но вот дальше рисовать схематическую параболу мы не будем, а продолжим рассуждение. Две нанесённые на ось точки разбили её на три интервала. Рассмотрим самый правый интервал: $(5; +\infty)$. Для любого значения x из этого интервала

числа $(x-2)$ и $(x-5)$ положительны — ведь на этом интервале $x > 5$, а значит, произведение $(x-2)(x-5)$ тоже положительно. Ставим над этим интервалом знак «+». Обратите внимание: это знак выражения $(x-2)(x-5)$ — правой части нашего неравенства — на рассматриваемом интервале.

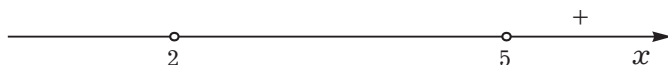


Рис. 43

Теперь сдвигаемся на соседний слева интервал: $(2; 5)$. Для любого значения x из этого интервала число $(x-2)$ положительно (ведь на этом интервале $x > 2$), а число $(x-5)$ отрицательно (ведь на этом интервале $x < 5$). Значит, произведение $(x-2)(x-5)$ для любого значения x из этого интервала отрицательно. Ставим над этим интервалом знак «-».

Сдвигаемся дальше влево на соседний интервал: $(-\infty; 2)$. Для любого значения x из этого интервала числа $(x-2)$ и $(x-5)$ отрицательны — ведь на этом интервале $x < 2$. Значит, произведение $(x-2)(x-5)$ положительно. Ставим над этим интервалом знак «+». В результате мы получили следующий рисунок.

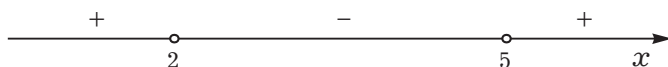


Рис. 44

Ещё раз напоминаем: над каждым интервалом стоит знак выражения $(x-2)(x-5)$ на этом интервале (можно сказать: во всех точках этого интервала). А поскольку мы решаем неравенство $(x-2)(x-5) > 0$, то мы интересуемся вопросом, где выражение $(x-2)(x-5)$ положительно, то есть имеет знак «+». На рисунке ответ на этот вопрос ясно виден.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

Замечание 1: На том же рисунке видно также решение другого нестроого неравенства: $(x-2)(x-5) < 0$. Это решение задаётся интервалом, над которым стоит знак «-».

Для неравенства $(x-2)(x-5) < 0$ ответ: $(2; 5)$.

Замечание 2: При решении соответствующих нестрогих неравенств $(x-2)(x-5) \geq 0$ или $(x-2)(x-5) \leq 0$ рисунок был бы таким же, только точки 2 и 5 на нём были бы закрашенными.

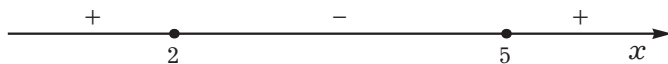


Рис. 45

Эти закрашенные точки должны включаться в ответ каждого из нестрогих неравенств.

Для неравенства $(x-2)(x-5) \geq 0$ ответ: $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$.

Для неравенства $(x-2)(x-5) \leq 0$ ответ: $[2; 5]$.

Решим подобным образом ещё одно квадратное неравенство: $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена в левой части равен 0, а его единственный корень равен $\frac{2}{3}$.

Таким образом, $9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$, и неравенство переписывается в виде: $9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > 0$, или, после деления обеих его частей на положительное число 9, в виде: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > 0$.

Нарисуем горизонтальную ось x и нанесём на неё корень трёхчлена — точку $\frac{2}{3}$, причём выколотую (поскольку неравенство строгое).

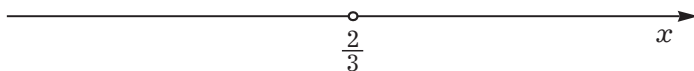


Рис. 46

Здесь сразу понятно, что для любой точки внутри каждого интервала нужно ставить знак «+», ведь квадрат ненулевого числа положителен.

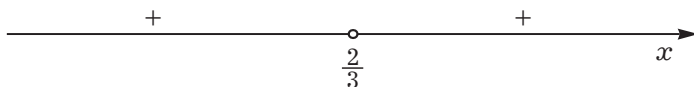


Рис. 47

Осталось выписать ответ. Он будет образован интервалами, над которыми стоит знак «+».

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Замечание 1: С помощью этого же рисунка можно получить также решение другого нестрогого неравенства: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 < 0$. Это решение задаётся интервалами, над которым стоит знак «-». Но поскольку таких интервалов нет, а точка $\frac{2}{3}$ выколотая, то решений неравенство не имеет.

Для неравенства $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 < 0$ ответ: $\emptyset$.

Замечание 2: При решении соответствующих нестрогих неравенств $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ или $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ рисунок был бы таким же, но точка $\frac{2}{3}$ на нём была бы закрашенная.

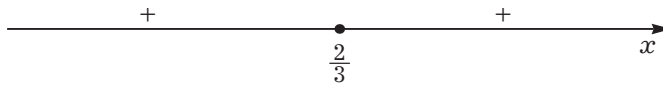


Рис. 48

Эта закрашенная точка должна включаться в ответ каждого из нестрогих неравенств в дополнение к интервалам с нужным знаком.

В ответ для неравенства $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ войдут и оба интервала, и разделяющая их точка, то есть в ответ войдут все действительные числа.

Для неравенства $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ ответ: $(-\infty; +\infty)$.

В ответ для неравенства $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ ни один из интервалов не войдёт, а точка $\frac{2}{3}$ войдёт. Таким образом, ответ будет состоять из одной этой точки.

Для неравенства $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ ответ: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Рассмотрим ещё один пример. Решим неравенство: $8x^2 - 11x + 4 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена в левой части отрицателен ($D = 11^2 - 4 \cdot 8 \cdot 4 = 121 - 128 < 0$). Квадратный трёхчлен на линейные множители не раскладывается. Но здесь срабатывает свойство квадратного трёхчлена, изученное нами в параграфе 1.4:

Если для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ выполняются соотношения $D < 0$ и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всех действительных x .

Отсюда заключаем, что наше неравенство верно при всех действительных x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Замечание 1: Точно такое же рассуждение проводится и при решении соответственного нестроого неравенства: $8x^2 - 11x + 4 \geq 0$. Ответ получается таким же.

Замечание 2: При решении неравенства $8x^2 - 11x + 4 < 0$ и неравенства $8x^2 - 11x + 4 \leq 0$ проводится следующее одинаковое рассуждение:

Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена $8x^2 - 11x + 4$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то $8x^2 - 11x + 4 > 0$ при всех действительных x , а следовательно, наше неравенство решений не имеет.

Развиваем умения



Н

1 Расскажите, приводя примеры.

- Как решать методом интервалов квадратное неравенство в случае положительного дискриминанта?
- Как решать методом интервалов квадратное неравенство в случае нулевого дискриминанта?

2 🌐 Каким может быть множество решений квадратного неравенства при отрицательном дискриминанте? Как решать такое неравенство, основываясь на свойствах квадратичной функции?

3 🌐 Закончите предложения.

а) Если у квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ отрицательный дискриминант, то решением неравенства $x^2 + px + q > 0$ является

б) Если у квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ отрицательный дискриминант, то решением неравенства $x^2 + px + q < 0$ является

4 Решите квадратное неравенство методом интервалов:

а) $-x^2 \geq 0$;

в) $-x^2 > -4$;

д) $2 - x^2 \leq 3$;

ж) $x^2 - 1 < 0$;

б) $x^2 \leq 25$;

г) $0,09 - x^2 \geq 0$;

е) $x^2 > 2$;

з) $x^2 - 2 < 5$.

Н

5 Решите квадратное неравенство методом интервалов:

а) $-x^2 + 2x \geq 0$;

д) $x^2 + 13x + 30 \geq 0$;

б) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$;

е) $-x^2 + 4x + 21 \leq 0$;

в) $x^2 - 8x + 16 < 0$;

ж) $8x^2 - 2x + 10 < 0$;

г) $-7x^2 + 3x - 2 > 0$;

з) $-x^2 + x + 20 > 0$.

6 Решите квадратное неравенство методом интервалов:

а) $-2x^2 + 2x - 3 > 0$;

д) $-6x^2 + \frac{23x}{4} + \frac{9}{8} > 0$;

б) $4x^2 \leq 3$;

е) $3x^2 - \frac{5x}{4} + 3 \leq 0$;

в) $\frac{1}{21}x^2 + \frac{1}{14}x - \frac{9}{2} \geq 0$;

ж) $x^2 - \frac{17x}{6} + \frac{5}{6} \geq 0$;

г) $-\frac{4}{81}x^2 - \frac{28x}{27} - \frac{16}{3} < 0$;

з) $-\frac{8}{7}x^2 - \frac{1}{2}x - 8 < 0$.

7 Решите квадратное неравенство методом интервалов:

а) $3x^2 + 2x - 2 > 0$;

д) $-\frac{5}{12}x^2 - \frac{16}{9}x - 1 > 0$;

б) $\frac{9x^2}{4} - \frac{115x}{12} + \frac{7}{3} < 0$;

е) $\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{9} + \frac{5}{7} < 0$;

в) $-9x^2 - 10x - 54 \leq 0$;

ж) $3x^2 + \frac{1}{5}x + 1 \leq 0$;

г) $-\frac{8x^2}{7} + \frac{23x}{7} + 45 \geq 0$;

з) $-x^2 - 10x + 24 \geq 0$.

8 Сведя неравенство к квадратному, решите его методом интервалов:

а) $(x-4)(x+5) > 22$;

д) $(x-7)(4+x) > -\frac{403}{16}$;

б) $\left(\frac{3}{2} - \frac{6x}{5}\right)(8-x) \geq -\frac{69}{10}$;

е) $\left(x - \frac{10}{3}\right)\left(\frac{5}{4} + x\right) \geq \frac{7}{2}$;

в) $\left(\frac{x}{9} - 2\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{7x}{8}\right) \leq -\frac{2}{5}$;

ж) $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{10}\right)\left(\frac{x}{5} - 10\right) \leq -56$;

г) $(x-1)(3+x) < -4$;

з) $-\left(-2 - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{7}{5} + \frac{10x}{9}\right) < \frac{13}{25}$.

П

9 а) При каких условиях замена знака $>$ на знак $\geq$ в квадратном неравенстве не приведёт к изменению ответа?

б) При каких условиях замена знака $<$ на знак $\leq$ в квадратном неравенстве не приведёт к изменению ответа?

10 Решите неравенство:

а) $(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x + 1) > 0$;

в) $(-x^2 + 5x - 7)(x^2 - 2x + 2) \leq 0$;

б) $(x^2 + 3x + 4)(3x^2 - x + 2) < 0$;

г) $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5) \geq 0$.

11 Решите неравенство:

а) $(x-3)(5x^2 + 4x + 1) > 0$;

в) $(7-2x)(x^2 - 7x + 13) \leq 0$;

б) $(3x+4)(5x^2 - 6x + 2) < 0$;

г) $(x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \geq 0$.

М

12 а) Докажите, что если справа от точки m нет нулей квадратичной функции $y(x) = x^2 + px + q$, то $y(m) \geq 0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Докажите, что если слева от точки m нет нулей квадратичной функции $y(x) = x^2 + px + q$, то $y(m) \geq 0$. Верно ли обратное утверждение?

в) Известно, что квадратичная функция $y(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных нуля x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Что можно сказать о расположении относительно этих нулей точки m , если $y(m) > 0$? А если $y(m) \geq 0$?

13 а) Докажите, что если справа от точки m нет нулей квадратичной функции $y(x) = ax^2 + bx + c$, то $a \cdot y(m) \geq 0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Докажите, что если слева от точки m нет нулей квадратичной функции $y(x) = ax^2 + bx + c$, то $a \cdot y(m) \geq 0$. Верно ли обратное утверждение?

в) Известно, что квадратичная функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных нуля x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Что можно сказать о расположении относительно этих нулей точки m , если $a \cdot y(m) > 0$? А если $a \cdot y(m) \geq 0$?

Вспоминаем то, что знаем

Решите методом интервалов неравенство $(x+2)(x-5) > 0$.



Открываем новые знания

Решите методом интервалов неравенство $(x+2)(x-5)(x-7) > 0$.
Что изменилось по сравнению с предыдущим неравенством?

Решите методом интервалов неравенство $\frac{(x+2)(x-5)}{x-7} > 0$.
Что изменилось по сравнению с предыдущим неравенством?



Как решить рациональное неравенство методом интервалов?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Соображения, применявшиеся нами в предыдущем параграфе при решении квадратных неравенств и приведшие нас к методу интервалов, можно использовать при решении других рациональных неравенств — как целых, так и дробных.

Начнём с целых рациональных неравенств.

Пример 1. Решим неравенство: $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) < 0$.

Поступим так же, как при решении самого первого примера, рассмотренного в предыдущем параграфе. Нарисуем горизонтальную ось x и нанесём на неё точки, в которых обращаются в нуль скобки, стоящие в левой части неравенства. Можно сказать по-другому: нанесём на ось корни соответственного уравнения $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) = 0$. Эти точки рисуем выколотыми (поскольку неравенство строгое).



Рис. 49

Дальнейшие рассуждения будут основываться на следующем утверждении, обоснование которого будет рассмотрено в старших классах.

Если все нули многочлена, равного произведению линейных множителей, нанесены на числовую ось и выбран любой из образовавшихся интервалов, то при всех значениях переменной из этого интервала (говорят также «во всех точках этого интервала») значения этого многочлена имеют один и тот же знак.

В нашем примере именно такая ситуация. Вас не должно смущать наличие степени у множителя вида $(x-1)^2$. Это произведение двух одинаковых линейных множителей $(x-1)$, или линейный множитель $(x-1)$ в квадрате.

Итак, мы знаем, что знак левой части неравенства постоянен на каждом интервале. Но как выяснить для каждого интервала, какой именно на этом интервале знак?

Самый простой выход — взять внутри интервала любую точку, подставить в выражение, стоящее в левой части, и определить, какой знак имеет получившееся произведение. Такая точка обычно называется *пробной точкой* (с её помощью пробуют, то есть определяют, знак).

Не мудрствуя лукаво, можно взять пробную точку в каждом интервале, определить знаки, и неравенство будет решено. Именно так мы советуем поступать, если все остальные методы вы забыли.

Но существует более удобный метод определения знака. Сначала знак определяют на одном из интервалов (удобно делать это на самом правом) с помощью пробной точки. Далее движутся влево, переходя на соседний слева интервал через некоторую точку. Если линейный множитель, *соответствующий этой точке* (говорят также *породивший эту точку*), стоит в нечётной степени, то знак выражения в левой части при переходе через эту точку (на соседний интервал) изменится, а если в чётной, то не изменится.

Это следует из того, что при переходе через точку a знаки всех скобок, кроме $(x-a)$, не изменятся, а знак скобки $(x-a)$ изменится на противоположный. Если скобка $(x-a)$ стоит в нечётной степени, то знак изменится нечётное количество раз и в результате станет противоположным. Если же скобка $(x-a)$ стоит в чётной степени, то знак изменится чётное количество раз и в результате останется прежним.

Вернёмся к решению неравенства $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) < 0$.

Возьмём уже сделанный нами рисунок оси с нанесёнными на неё точками. На самом правом интервале, взяв, например, пробную точку $x=100$, видим, что все скобки положительны, а значит, произведение тоже положительно. Ставим на самом правом интервале знак «+». Переходим на соседний слева интервал через точку 5. Соответствующий множитель $(x-5)$ имеет первую степень, значит, знак меняется. Ставим на этом интервале знак «-». Переходим на соседний слева интервал через точку 3. Соответствующий множитель $(x-3)^3$ имеет третью степень, значит, знак меняется. Ставим на этом интервале знак «+». Переходим на соседний слева интервал через точку 2. Соответствующий множитель $(x-2)^2$ имеет вторую степень, значит, знак не меняется. Ставим на этом интервале знак

«+». Наконец, переходим на соседний слева интервал через точку -2 . Соответствующий множитель $(x+2)$ имеет первую степень, значит, знак меняется. Ставим на этом интервале знак «-».

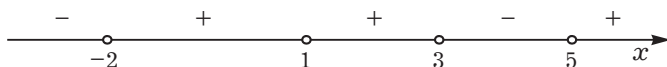


Рис. 50

Ответ образуют интервалы со знаком «-».

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (3; 5)$.

Замечание 1: При записи решения разобранного примера мы очень подробно объясняли расстановку знаков. Решая задачи в тетради, никаких объяснений писать не надо — просто «молча» расставлять знаки. При небольшой тренировке это делается почти мгновенно.

Замечание 2: Полученный рисунок позволит также решить нестрогое неравенство $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) > 0$. Ответ будет состоять из всех интервалов, над которыми стоит знак «+».

Ответ: $(-2; 1) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$.

Замечание 3: При решении соответствующих нестрогих неравенств мы получили бы точно такой же рисунок, только точки на нём были бы закрашенными:



Рис. 51

В ответ включаются интервалы с нужным знаком, а также все закрашенные точки. При этом возможны три различные ситуации. Если закрашенная точка разделяет интервалы с разными знаками, то она войдёт в ответ как граница интервала с нужным знаком. Если закрашенная точка разделяет интервалы с чужим знаком, то она войдёт в ответ как отдельная точка (в этом случае её называют также *изолированной точкой*). Если закрашенная точка разделяет интервалы с нужным знаком, то такие два интервала «склеятся» в один. Все эти случаи встретятся нам при решении нестрогих неравенств по приведённому выше рисунку.

Для неравенства $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) \leq 0$ ответ будет следующим: $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [3; 5]$.

Здесь в ответ входит изолированная точка $\{1\}$.

Для неравенства $(x+2)(x-1)^2(x-3)^3(x-5) \geq 0$ ответ будет следующим: $[-2; 3] \cup [5; +\infty)$.

Здесь два соседних интервала $[-2; 1]$ и $[1; 3]$ «склеились» в один интервал $[-2; 3]$.

Заметим, что в целых рациональных неравенствах собственно сам метод интервалов начинается в тот момент, когда при нулевой правой части левая часть неравенства разложена в произведение линейных множителей (некоторые из

этих линейных множителей могут входить в это произведение в натуральных степенях, больших единицы). Такое разложение требует выполнения тождественных преобразований, замен и т.д.

Пример 2. Решим неравенство: $x^7 + 3x^6 - 4x^5 - 12x^4 \geq 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители. Сначала вынесем за скобки множитель x^4 , затем сгруппируем в скобках первое слагаемое со вторым, а третье с четвёртым:

$$x^7 + 3x^6 - 4x^5 - 12x^4 = x^4(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) = x^4((x^3 + 3x^2) - (4x + 12)).$$

Теперь в первых внутренних скобках вынесем x^2 , а во вторых вынесем 4:

$$x^4((x^3 + 3x^2) - (4x + 12)) = x^4(x^2(x + 3) - 4(x + 3)).$$

Наконец, вынося за скобки $(x + 3)$, мы получим разность квадратов $(x^2 - 4)$, которую разложим на множители по соответственной формуле:

$$x^4(x^2(x + 3) - 4(x + 3)) = x^4((x + 3)(x^2 - 4)) = x^4(x + 3)(x + 2)(x - 2).$$

В результате неравенство приобретает вид:

$$x^4(x + 3)(x + 2)(x - 2) \geq 0.$$

Теперь можно применять собственно метод интервалов. Как это делается, мы уже знаем. Наносим на числовую ось закрашенные точки -3 ; -2 ; 0 ; 2 .

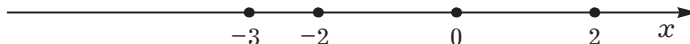


Рис. 52

Расставляем знаки. На самом правом интервале ставим знак «+», выяснив его с помощью пробной точки. При переходе влево через точку 2 знак меняется, поскольку породивший эту точку линейный множитель $(x - 2)$ стоит в 1-й (нечётной) степени. При переходе влево через точку 0 замечаем, что породивший эту точку линейный множитель x стоит в 4-й (чётной) степени, значит, знак при переходе через точку 0 не меняется. Наконец, при дальнейших переходах через точки -2 и -3 знак меняется, поскольку породившие эти точки линейные множители $(x + 2)$ и $(x + 3)$ стоят в 1-й (нечётной) степени каждый.

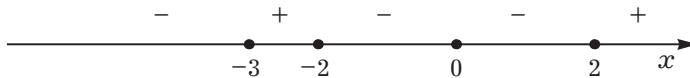


Рис. 53

По данным рисунка выписываем ответ, учитывая, что нас интересует знак «+».

Ответ: $[-3; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство: $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4) < 40$.

Произведение в левой части бесполезно, поскольку справа стоит не ноль. После записи неравенства в виде $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4) - 40 < 0$ возникает вопрос, как разложить левую часть на множители. Простое раскрытие скобок приведёт к многочлену четвёртой степени с неясными перспективами. Попробуем группировать скобки по две. Это можно сделать тремя разными способами: первую со второй (и тогда автоматически окажутся сгруппированными третья с четвёртой), первую с третьей и, наконец, первую с четвёртой.

При группировке скобок «первая со второй, третья с четвёртой» получим:

$$\begin{aligned} ((x-1)(x+1))((x+2)(x+4)) - 40 &< 0, \\ (x^2-1)(x^2+6x+8) - 40 &< 0. \end{aligned}$$

Никаких дальнейших перспектив упрощения левой части не видно.

При группировке скобок «первая с третьей, вторая с четвёртой» получим:

$$\begin{aligned} ((x-1)(x+2))((x+1)(x+4)) - 40 &< 0, \\ (x^2+x-2)(x^2+5x+4) - 40 &< 0. \end{aligned}$$

Здесь тоже никаких дальнейших перспектив упрощения левой части не видно.

Наконец, при группировке скобок «первая с четвёртой, вторая с третьей» получим:

$$\begin{aligned} ((x-1)(x+4))((x+1)(x+2)) - 40 &< 0, \\ (x^2+3x-4)(x^2+3x+2) - 40 &< 0. \end{aligned}$$

Здесь возможно дальнейшее упрощение, если сделать замену $t = x^2 + 3x$. Выполняя эту замену, приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} (t-4)(t+2) - 40 &< 0, \\ t^2 - 2t - 48 &< 0. \end{aligned}$$

Корни квадратного трёхчлена в левой части $t = 8$ и $t = -6$, значит:

$$(t-8)(t+6) < 0.$$

Подставляя $t = x^2 + 3x$, получим:

$$(x^2 + 3x - 8)(x^2 + 3x + 6) < 0.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена в правой скобке отрицателен, а старший коэффициент положителен, значит, этот квадратный трёхчлен положителен при всех действительных x . Следовательно, на него можно разделить обе части неравенства! Обычно это кратко записывают так:

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x - 8)(x^2 + 3x + 6) < 0 \quad | : (x^2 + 3x + 6) > 0 \text{ при всех } x \\ x^2 + 3x - 8 < 0. \end{aligned}$$

Осталось решить квадратное неравенство. Сделаем это методом интервалов.

$$D = 41, x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}, \text{ значит:}$$

$$\left(x - \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}\right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}\right) < 0.$$

Нанесём корни на ось и расставим знаки.

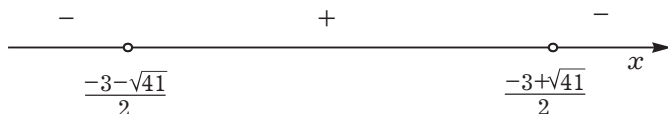


Рис. 54

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-3 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \right).$$

С помощью метода интервалов можно решать также и дробные рациональные неравенства. Начинать нужно с того, что перенести всё в левую часть неравенства (так, чтобы справа стоял нуль), после чего преобразовать левую часть в алгебраическую дробь. В процессе этих преобразований рекомендуется не сокращать дроби (иногда это может приводить к потере равносильности), а выносить соответственные множители за скобки. Числитель и знаменатель алгебраической дроби в левой части неравенства нужно попытаться разложить на линейные множители. Если это удастся сделать, то применяется такая же техника, как и для целых рациональных неравенств, но со следующими уточнениями.

1) На числовую ось наносятся и нули числителя, и нули знаменателя. При этом нули знаменателя всегда наносятся выколотыми точками, а нули числителя выколотыми, если неравенство строгое, и закрашенными, если неравенство нестрогое. При этом, если точка является и нулём числителя, и нулём знаменателя, она обязательно будет выколотой.

2) Для линейного множителя, стоящего и в числителе, и в знаменателе (с какими-то показателями степеней), при решении вопроса, меняется знак или нет при переходе через соответствующую точку, играет роль чётность или нечётность суммы соответствующих степеней.

$$\text{Пример 4. Решим неравенство: } \frac{(x-5)^2(x-4)}{(x-4)(x-1)} \leq 0.$$

Нарисуем горизонтальную ось x и сначала нанесём на неё точки (выколотыми!), в которых обращаются в нуль скобки, стоящие в знаменателе. Это точки 1 и 4. Затем нанесём на ось точки, в которых обращаются в нуль скобки, стоящие в числителе. Так как неравенство нестрогое, то эти точки нужно наносить закра-

шенными. Но точка 4 уже нанесена выколотой (из-за знаменателя). Точку 5 наносим закрашенной.

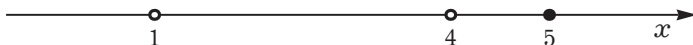


Рис. 55

На самом правом интервале ставим знак «+», определив его с помощью пробной точки. При переходе влево через точку 5 знак не меняется, поскольку породивший эту точку линейный множитель $(x-5)$ стоит во 2-й (чётной) степени. При переходе влево через точку 4 замечаем, что породивший эту точку линейный множитель $(x-4)$ стоит в 1-й степени в числителе и в 1-й степени в знаменателе. Сумма этих показателей равна 2 (число чётное), значит, знак не меняется. Наконец, при переходе влево через точку 1 знак меняется, поскольку породивший эту точку линейный множитель $(x-1)$ стоит в 1-й (нечётной) степени.

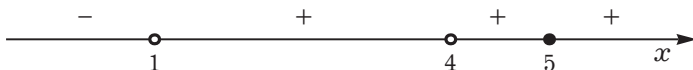


Рис. 56

По данным рисунка выписываем ответ, учитывая, что нас интересует знак «-».

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \{5\}$.

Мы рекомендовали в процессе преобразований дробного рационального неравенства не сокращать дроби. В разобранный выше примере 4 мы именно так и поступили.

Разберёмся, что произошло бы, если бы мы сократили дробь в левой части неравенства на $(x-4)$.

Неравенство приобрело бы вид: $\frac{(x-5)^2}{(x-1)} \leq 0$.

Рисунок с отмеченными точками выглядел бы так.

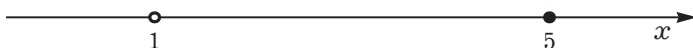


Рис. 57

После расстановки знаков рисунок выглядел бы так.

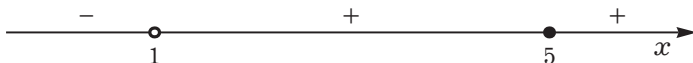


Рис. 58

Ответ в решаемом нами неравенстве не изменился бы, но это не должно вводить нас в заблуждение — рисунок-то другой! Хорошо видно, что рис. 58 отличается от рис. 56.

Скажем, если бы мы решали неравенство $\frac{(x-5)^2(x-4)}{(x-4)(x-1)} \geq 0$, то по данным рис. 56 мы получили бы верный ответ $(1; 4) \cup (4; +\infty)$, а по данным рис. 58 — неверный ответ $(1; +\infty)$.

Однако совет не сокращать дроби не надо воспринимать как абсолютный запрет. Правильно было бы сказать: «Если сокращать умело, то можно». Умение заключается в том, что если производится сокращение дробей, то нужно выписывать соответственные ограничения и учитывать их на рисунке.

В обсуждаемом примере, желая сократить дробь на $(x-4)$, мы должны были бы выписать связанное с этим сокращением (делением!) ограничение $x \neq 4$, и его учёт на рисунке привёл бы к тому, что кроме точек 1 (выколотой) и 5 (закрашенной) на рис. 57 должна была бы появиться точка 4 (выколотая), то есть «неправильный» рис. 57 превратился бы в «правильный» рис. 55. Наконец, правило знаков для точки, появившейся в результате учёта ограничений, связанных с сокращениями, такое: «Если точка не порождена никаким множителем, а появилась только в результате учёта ограничений, то при переходе через такую точку знак не меняется».

В результате, умело сокращая дробь, мы приходим к тому же рис. 56, к которому пришли, не сокращая дробь.

Таким образом, каждый решает для себя, как ему лучше поступать при решении дробных рациональных неравенств: то ли воспользоваться советом не сокращать дроби, то ли научиться сокращать их умело.

Развиваем умения



Н

- 1 Расскажите, приводя примеры.
 - а) Как решать методом интервалов целое рациональное неравенство?
 - б) Как решать методом интервалов дробное рациональное неравенство?
- 2 Что общего в решении методом интервалов целых и дробных рациональных неравенств?
- 3 Чем отличается решение методом интервалов целых и дробных рациональных неравенств?
- 4 Решите неравенство:

а) $(x-2)(x-4)(x+1) \geq 0$;	в) $x(x+5)(x-7) \leq 0$;
б) $(x-7)(x+5)(x-4) > 0$;	г) $(x+10)(x+5)(x+7) < 0$;

$$д) (x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{7}{5}\right) \geq 0;$$

$$ж) (x-8)(x+8)(x-5) \leq 0;$$

$$е) \left(x-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right) > 0;$$

$$з) (x-1)(x-9)(x+6) < 0.$$

5 Решите неравенство:

$$а) (x-2)^2(x-9) \geq 0;$$

$$д) (x+7)^2(x+4)^2 \geq 0;$$

$$б) (x+1)^3(x-1)^2 > 0;$$

$$е) (x+6)^5(x-1)^5(x-9) > 0;$$

$$в) (x-2)(x+3)^3(x-6) < 0;$$

$$ж) (x+10)^4(x+7)^2(x+2) < 0;$$

$$г) (x-9)^3(x+2)^5(x-4)^4 \leq 0;$$

$$з) (x+1)^5(x-1)(x-7)^5 \leq 0.$$

6 Решите неравенство:

$$а) (x-2)(x^2-9) \geq 0;$$

$$д) (x+7)(x^2-7x-18) \geq 0;$$

$$б) (x+1)(x^2-1) > 0;$$

$$е) (x-2)(x^2-3x-40) > 0;$$

$$в) (1+x)(x^2-x-72) \leq 0;$$

$$ж) (x^2-19x+90)(x+10) \leq 0;$$

$$г) (x+5)(x^2+x-20) < 0;$$

$$з) (x-8)(9x+x^2) < 0.$$

Н

7 Решите неравенство:

$$а) -x^3 + 2x^2 \geq 0;$$

$$д) x^3 + 2x^2 - 63x \geq 0;$$

$$б) x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0;$$

$$е) x^3 - 23x^2 + 60x \leq 0;$$

$$в) 90x^4 - 19x^5 + x^6 > 0;$$

$$ж) 170x^3 + x^5 - 27x^4 > 0;$$

$$г) x^5 + x^4 - 6x^3 < 0;$$

$$з) x^5 + 11x^4 - 80x^3 < 0.$$

8 Найдите все решения неравенства:

$$а) x^3 + 2x^2 + 3x + 6 \geq 0;$$

$$д) x^5 + 7x^4 + 20x^3 + 140x^2 \geq 0;$$

$$б) x^5 - 169x < 0;$$

$$е) x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x < 0;$$

$$в) x^7 - 3x^6 + 18x^5 - 54x^4 > 0;$$

$$ж) x^7 - 27x^5 + 180x^3 > 0;$$

$$г) x^3 + 40x^2 + 400x \leq 0;$$

$$з) 10x^2 + 50x + x^4 + 5x^3 \leq 0.$$

9 Решите неравенство:

$$а) (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) \leq 0;$$

$$д) (21 - 11x - 2x^2)(12 - 4x - x^2) \leq 0;$$

$$б) (x^2 - 8x)(25 + 10x + x^2) > 0;$$

$$е) (2x^2 + 28x + 90)(4x^2 - 8x + 4) > 0;$$

$$в) (x^2 - 36)(x^2 + 3x - 4) < 0;$$

$$ж) (-14 - 44x - 6x^2)(8x^2 - x - 9) < 0;$$

$$г) (x^2 - 10x + 21)(x^2 - 5x + 4) \geq 0;$$

$$з) (x^2 - 2x - 35)(x^2 + 4x - 77) \geq 0.$$

10 Решите неравенство:

а) $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$;

б) $2x^4 + x^2 - 3 > 0$;

в) $5x^4 - 9x^2 + 8 \geq 0$;

г) $-6x^4 - 7x^2 + 10 < 0$;

д) $-9x^4 - x^2 + 10 \leq 0$;

е) $10x^4 + 8x^2 - 2 > 0$;

ж) $8 - 5x^2 - 3x^4 \geq 0$;

з) $6x^4 + 19x^2 - 20 < 0$.

11 Решите неравенство:

а) $\frac{2x-1}{x+2} > 0$;

б) $\frac{14+5x}{20-x} < 0$;

в) $\frac{2x-15}{17x+6} \leq 0$;

г) $-\frac{1+6x}{4x} \geq 0$;

д) $\frac{3-2x}{3x+2} > 0$;

е) $\frac{10x-9}{13+17x} < 0$;

ж) $\frac{11x-18}{2-2x} \leq 0$;

з) $\frac{19}{18(x-1)} \geq 0$.

12 Решите неравенство:

а) $\frac{x^2-x-2}{x+3} > 0$;

б) $\frac{x-4}{x^2-2x-8} \geq 0$;

в) $\frac{x^2+6x-7}{6+10x} \leq 0$;

г) $\frac{8x-3}{x^2+5x-6} < 0$;

д) $\frac{56-15x+x^2}{7-10x} > 0$;

е) $\frac{6-10x}{x^2+5x+4} \geq 0$;

ж) $\frac{63+16x+x^2}{3+4x} \leq 0$;

з) $\frac{-2-9x}{x^2+2x-80} < 0$.

13 Решите неравенство:

а) $\frac{(2x-4)(3x-6)}{x+1} \leq 0$;

б) $\frac{-10-8x}{(5+3x)(15x+25)} < 0$;

в) $\frac{(24-12x)(9x-18)}{10-6x} \geq 0$;

г) $\frac{x-9}{(6-10x)(5x-3)} > 0$;

д) $\frac{(-12-8x)(6+4x)}{x} \leq 0$;

е) $\frac{3+9x}{(10-x)(2x-20)} < 0$;

ж) $\frac{(30-40x)(-30+40x)}{8x-10} \geq 0$;

з) $\frac{-1-6x}{(-4-14x)(7x+2)} > 0$.

14 Решите неравенство:

а) $\frac{2x-5}{x+1} > 1;$

д) $-\frac{8x+9}{10+10x} > -1;$

б) $\frac{-3-5x}{10x-2} \leq \frac{5}{4};$

е) $\frac{3-2x}{3x-2} \leq \frac{1}{2};$

в) $\frac{-1-x}{8x-6} \geq -\frac{9}{2};$

ж) $\frac{-6-x}{5x+5} \geq -\frac{9}{7};$

г) $\frac{x-7}{4x-9} < \frac{1}{3};$

з) $\frac{3x-7}{5+4x} < 6.$

15 Решите неравенство:

а) $\frac{2x+6}{x+1} > x;$

д) $-\frac{51x+20}{5(4+5x)} > -\frac{14}{5}x;$

б) $\frac{14+5x}{2(2x-1)} \geq \frac{3}{2}x;$

е) $\frac{5(3-25x)}{3(x-3)} \geq \frac{35}{3}x;$

в) $\frac{2(155x-42)}{7(6+7x)} \leq -\frac{9}{7}x;$

ж) $\frac{8x-4}{-9-x} \leq \frac{1}{2}x;$

г) $\frac{7(7x-3)}{2+x} < 10x;$

з) $\frac{2}{5x-10} < x.$

16 Решите неравенство:

а) $\frac{x+6}{x+1} > \frac{x-1}{x+2};$

д) $\frac{9-2x}{6x-5} > \frac{4+5x}{2x-7};$

б) $\frac{2+4x}{4-6x} < \frac{8-x}{1-9x};$

е) $-\frac{9+2x}{4x-10} < \frac{6x}{1+10x};$

в) $\frac{2+7x}{-6-2x} \leq \frac{7+10x}{6+2x};$

ж) $\frac{2+2x}{8+8x} \leq \frac{9x-8}{9x-6};$

г) $\frac{9x-10}{-7-6x} \geq \frac{7x-5}{-10-x};$

з) $\frac{2x-3}{3x-2} \geq \frac{2x-1}{3x+2}.$

17 Решите неравенство:

а) $\frac{45x+45}{225x+225} > \frac{120x^2+196x+80}{-88-206x-120x^2};$

б) $\frac{91x^2-91}{130+195x+65x^2} < \frac{54-6x-104x^2}{135-312x+169x^2};$

в) $\frac{35+25x-10x^2}{-60-45x+15x^2} \leq \frac{-39+41x-10x^2}{91x-35x^2};$

$$\text{г)} \frac{40x^2 - 8x - 14}{20x^2 + 76x - 63} \geq \frac{36x^2 - 111x - 77}{72x^2 - 42x - 49};$$

$$\text{д)} \frac{154x^2 + 105x + 14}{98 + 119x - 154x^2} > \frac{20x^2 + 29x - 36}{40 - 18x - 40x^2};$$

$$\text{е)} -\frac{45x - 54}{135x} < \frac{5 - 50x^2 + 15x}{9 + 65x^2 + 58x};$$

$$\text{ж)} \frac{83x - 30 - 55x^2}{165x^2 - 271x + 110} \leq \frac{5x^2 + 62x - 112}{14x + 196};$$

$$\text{з)} \frac{84x^2 + 48x - 45}{24 - 27x - 42x^2} \geq -\frac{80x^2 + 70x + 15}{9 + 9x - 40x^2}.$$

18 Решите неравенство:

$$\text{а)} \frac{(-8-x)(5+2x)^5}{(-2-8x)^2(3+7x)^2} > 0;$$

$$\text{б)} \frac{(6x-10)^4(10x+8)^2}{(-9-4x)^5(5x-2)^6} < 0;$$

$$\text{в)} \frac{(-8-5x)^5(4x-7)^2(4+5x)}{(-6-5x)^6(-9-3x)^6(4+9x)^4} \leq 0;$$

$$\text{г)} \frac{65\,536(3+6x)^4}{(4-9x)^3(-10-4x)^5(-6-x)^2} \geq 0;$$

$$\text{д)} \frac{(6-10x)^5(6-9x)^2(7-x)^5(7+10x)^2}{(9-2x)^6 x^2(2x-6)^5(4x-3)} > 0;$$

$$\text{е)} \frac{(7-10x)^3(3-6x)^6(-1-x)(2x+4)^3}{(2x-5)(4x-10)^5(7x+3)^4(9x+8)^4} < 0;$$

$$\text{ж)} \frac{(-1-10x)^5(-6-7x)^5(3x+7)^2(5x+1)^6(10x-2)}{28x^2(-3-8x)(10-6x)^2(8-2x)^5} \leq 0;$$

$$\text{з)} \frac{(10-7x)^6(-4-2x)^2(1-x)^4(8+x)^4(3+3x)^6}{(-9-5x)^5(6-5x)^3(7-x)^2(3+2x)^4(6+4x)^2} \geq 0.$$

П**19** Решите неравенство:

а) $\frac{3}{x^2+8x+17} + \frac{4}{x^2+8x+18} \geq 5;$

б) $\frac{7}{7x-1} - \frac{5}{5x-2} - \frac{3}{2(12+35x+20x^2)} < 0;$

в) $\frac{9}{3x^2+12x+14} + \frac{2}{5x^2-10x+5} > 0;$

г) $\frac{9}{20x^2-35x+15} + \frac{6}{50x^2+25x+8} \leq -5.$

20 Решите неравенство:

а) $\frac{2}{x^2-x+1} > \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1};$

в) $\frac{4x+1}{1+x^3} + \frac{x+1}{x^2-x+1} \geq \frac{6}{1+x};$

б) $\frac{2x+1}{1-x^2} - \frac{2}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{1-x};$

г) $\frac{36-x}{x^3+1} + \frac{x-6}{x+1} < \frac{x^2+x+16}{x^2-x+1}.$

21 Решите неравенство:

а) $\frac{3-x}{x^2+2x-3} \leq \frac{9-3x}{3x^2-2x-5};$

в) $\frac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4} > \frac{(3x+2)^2}{9x^2-4};$

б) $\frac{2x+2}{2x^2+9x+10} < \frac{x+1}{4x^2+4x-15};$

г) $\frac{2x^2+3x-20}{3x^2+10x-8} \geq \frac{(6x+4)^2}{18x^2-8}.$

М**22** Решите неравенство:

а) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 \leq 0;$

в) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) - 3 \geq 0;$

б) $(x+3)^2 + \frac{1}{(x+3)^2} \leq 2;$

г) $\frac{x}{x^2-2} + \frac{6(x^2-2)}{x} > 7.$

23 Решите неравенство:

а) $\frac{4}{x^2+5x-6} - \frac{5}{x^2+5x+6} < \frac{1}{4};$

в) $\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{4}{x^2+2x-8} \geq \frac{1}{6};$

б) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} > 1;$

г) $\frac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1} - \frac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1} < 2.$



Знакомимся с новыми знаниями

Во многих ситуациях приходится рассматривать одновременно несколько неравенств с одним неизвестным. При этом могут ставиться разные вопросы и решаться разные задачи. Основными, наиболее часто встречающимися задачами являются следующие две.

1) Требуется найти такие значения неизвестного, которые являются решениями сразу *всех* рассматриваемых неравенств. В таком случае говорят, что нужно решить *систему неравенств*. Неравенства, входящие в систему, записываются одно под другим и соединяются фигурной скобкой.

2) Требуется найти такие значения неизвестного, которые являются решениями *хотя бы одного* из рассматриваемых неравенств. В таком случае говорят, что нужно решить *совокупность неравенств*. Неравенства, входящие в совокупность, записываются одно под другим и соединяются квадратной скобкой.

Уже в самих определениях понятий системы неравенств и совокупности неравенств содержится указание на метод их решения.

Чтобы решить систему неравенств с одним неизвестным, можно решить каждое неравенство отдельно и взять *пересечение* полученных множеств.

Чтобы решить совокупность неравенств с одним неизвестным, можно решить каждое неравенство отдельно и взять *объединение* полученных множеств.

Каким образом это удобно делать на рисунках, мы обсуждали выше, в параграфе 2.3, когда говорили о числовых промежутках.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим систему неравенств:
$$\begin{cases} 3x - 5 < 2x + 3, \\ 5x + 2 \geq 17. \end{cases}$$

Здесь оба неравенства сводятся к линейным.

Решая первое неравенство, получим: $3x - 2x < 3 + 5$; $x < 8$.

Решая второе неравенство, получим: $5x \geq 15$; $x \geq 3$.

Изобразим полученные множества решений первого и второго неравенств с помощью «навесов» разной высоты:

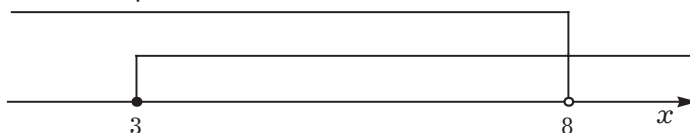


Рис. 59

Для нахождения пересечения множеств нужно взять точки, лежащие одновременно под двумя «навесами».

Ответ: $[3; 8)$.

Замечание: Если бы мы решали совокупность этих же двух неравенств, то до самого последнего момента решение было бы абсолютно таким же, как для системы. Только в самом конце нам нужно было бы взять не пересечение, а объединение множеств решений первого и второго неравенств. Это объединение состоит из точек, лежащих хотя бы под одним «навесом». В нашем случае это вся числовая прямая.

Ответ для совокупности $\begin{cases} 3x - 5 < 2x + 3, \\ 5x + 2 \geq 17 \end{cases}$ следующий: $(-\infty; +\infty)$.

Вы видите, что основной объём работы при решении систем и совокупностей приходится на решение каждого из неравенств.

Пример 2. Решим систему неравенств: $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0, \\ \frac{x+4}{x-3} \geq 0. \end{cases}$

Решим первое неравенство методом интервалов. Дискриминант квадратного трёхчлена равен 36, а его корни равны -2 и 4 . Первое неравенство переписывается в виде $(x+2)(x-4) \leq 0$. Нарисуем рисунок (обе точки закрашенные) и расставим знаки.

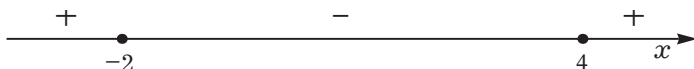


Рис. 60

Решение первого неравенства: $[-2; 4]$.

Решим второе неравенство методом интервалов. Нарисуем рисунок (точка -4 закрашенная, а точка 3 выколота) и расставим знаки.

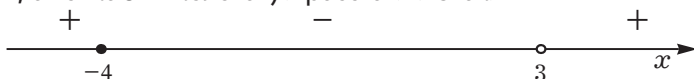


Рис. 61

Решение второго неравенства: $(-\infty; -4] \cup (3; +\infty)$.

Для получения решения системы изобразим на общей числовой прямой решения каждого из неравенств с помощью «навесов» разной высоты.

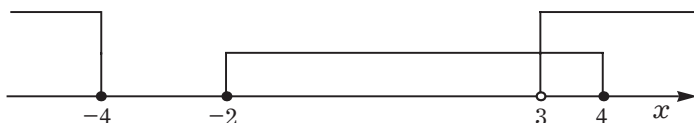


Рис. 62

Решение системы образуют точки, над которыми лежат одновременно два «навеса» разной высоты.

Ответ: $(3; 4]$.

Замечание: С помощью последнего рисунка можно также записать решение

соответственной совокупности неравенств:
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0, \\ \frac{x+4}{x-3} \geq 0. \end{cases}$$

Ответ для совокупности: $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$.

Определённые трудности могут возникнуть, когда решение одного из неравенств (или сразу нескольких) содержит изолированные точки. Чтобы не «потерять» эти точки на рисунке, в них обычно изображают флажок или стрелку.

Пример 3. Решим систему неравенств:
$$\begin{cases} (x-3)^2(x-1) \leq 0, \\ x+2 > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов. Нарисуем рисунок (обе точки закрашенные) и расставим знаки.

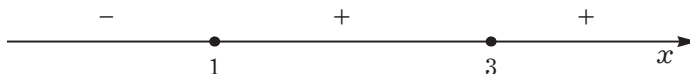


Рис. 63

Решение первого неравенства: $(-\infty; 1] \cup \{3\}$.

Второе неравенство решается устно: $(-2; +\infty)$.

Для получения решения системы изобразим на общей числовой прямой решения каждого из неравенств с помощью «навесов» разной высоты. Изолированную точку 3 отметим флажком.

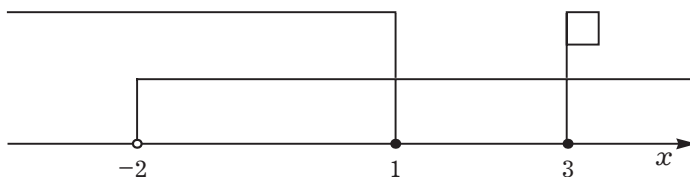


Рис. 64

Ответ: $(-2; 1] \cup \{3\}$.

Заметим, что иногда приходится иметь дело с двойным неравенством. Оно представляет собой не что иное, как компактную форму записи системы неравенств. Так, двойное неравенство $a < b < c$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} a < b, \\ b < c. \end{cases}$$

Некоторые двойные неравенства можно решать сразу как двойные.

Например, решим двойное неравенство: $3 < 2x - 5 \leq 7$.

Прибавим ко всем трём частям неравенства число 5, получим:

$$\begin{aligned}3 + 5 < 2x - 5 + 5 &\leq 7 + 5, \\8 < 2x &\leq 12.\end{aligned}$$

Разделим все три части неравенства на положительное число 2:

$$4 < x \leq 6.$$

Ответ: $(4; 6]$.

Но так удаётся решить лишь очень немногие двойные неравенства. В большинстве случаев придётся переходить к системе. Скажем, чтобы решить двойное неравенство $10 \leq x^2 + 3x \leq 18$, нужно записать его в виде системы двух неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 10, \\ x^2 + 3x \leq 18, \end{cases} \text{ после чего решать эту систему.}$$

Развиваем умения



Н

1

Расскажите, приводя примеры.

а) Что называется системой неравенств?

б) Что называется совокупностью неравенств?

2

Расскажите, приводя примеры.

а) Как решать систему неравенств?

б) Как решать совокупность неравенств?

3

Что общего при решении системы и совокупности одних и тех же неравенств и в чём различия?

4

Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 5x + 2 \geq 0; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 5 - 10x \geq 0, \\ 2 - 3x < 0; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} -5 + 8x > 0, \\ -9 - 5x < 0; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} 2 + x \geq 0, \\ 2 + 10x > 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 3 - 2x > 0, \\ -6 - 7x \leq 0; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 4 - 3x \leq 0, \\ -7 - 7x < 0; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} 10 + 8x > 0, \\ 7 + 7x \geq 0; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} -2 + 2x \leq 0, \\ 6 + 8x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

5

Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 5x + 4 < -x + 5, \\ 2x + 7 \geq x - 1; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} 6 + 10x < -6 + 5x, \\ -2 - 10x > 4 - 6x; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} -5 + 10x \leq 3 - 8x, \\ 2x > -3 - 10x; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} -5 + 7x < 6 - 2x, \\ -1 + 3x \leq 3 - 3x; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} -9 - 2x \leq -10 - 3x, \\ x > -4 + 5x; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} -9 - 10x \leq 7 + 9x, \\ 6 - 4x \geq -10 + 4x; \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 9x \leq -7 - 6x, \\ -5 - 3x < -1 - 9x; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} 3 - 2x < 2 + x, \\ -2 - 4x \geq -1 - 6x. \end{cases} \end{array}$$

6 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 3x < 0, \\ 2x + 5 < 0; \end{cases}$	д) $\begin{cases} 6x + 4x^2 \geq 0, \\ 7 + 10x \geq 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 9x + 9x^2 \geq 0, \\ -5 - 2x \leq 0; \end{cases}$	е) $\begin{cases} 7x - 7x^2 > 0, \\ -2 + x > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3x - 7x^2 \leq 0, \\ -4 - 5x \leq 0; \end{cases}$	ж) $\begin{cases} -9x - 4x^2 \geq 0, \\ 7 - 9x < 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x - 5x^2 \geq 0, \\ 5 + 8x > 0; \end{cases}$	з) $\begin{cases} 2x - 7x^2 > 0, \\ -2 - 6x \leq 0. \end{cases}$

Н

7 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ 12x + 1 \leq 8x + 21; \end{cases}$	д) $\begin{cases} -3 + 22x - 7x^2 \geq 0, \\ 6 + 2x > 10 + 8x; \end{cases}$
б) $\begin{cases} -40 - 74x + 36x^2 \geq 0, \\ 9 - 2x \leq 8 + 10x; \end{cases}$	е) $\begin{cases} 80 + 58x + 6x^2 \geq 0, \\ -8x > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} -2 + 11x - 15x^2 < 0, \\ -6 - 2x \geq 5 + x; \end{cases}$	ж) $\begin{cases} 12 + 7x - 49x^2 < 0, \\ -2 - x < 8 + 10x; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -5 - 47x + 30x^2 > 0, \\ -9 + x < -2 - 6x; \end{cases}$	з) $\begin{cases} 15 - 7x - 30x^2 \geq 0, \\ 6 - 7x > -7 + 7x. \end{cases}$

8 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0; \end{cases}$	д) $\begin{cases} -8 - 74x - 80x^2 > 0, \\ -40 - 94x - 42x^2 \leq 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 63 - 95x + 18x^2 \leq 0, \\ 3 + 3x - 36x^2 < 0; \end{cases}$	е) $\begin{cases} 16 - 20x - 24x^2 \leq 0, \\ 54 - 6x - 60x^2 > 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} -4 + 6x + 54x^2 < 0, \\ -80 + 110x - 30x^2 \geq 0; \end{cases}$	ж) $\begin{cases} -30 + 36x - 6x^2 > 0, \\ -4 - 33x - 35x^2 < 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -18 + 60x + 48x^2 \leq 0, \\ 8 + 50x + 50x^2 > 0; \end{cases}$	з) $\begin{cases} -25 - 80x - 63x^2 \leq 0, \\ -14 - 63x - 49x^2 \geq 0. \end{cases}$

9 Решите двойное неравенство:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| а) $4 < 3x - 5 \leq 13$; | д) $-8 \leq 4 - 2x \leq 2$; |
| б) $7 < 7 - 2x \leq 10$; | е) $6 \leq 7 + 2x \leq 6$; |
| в) $-6 \leq -5 + 4x < -5$; | ж) $-9 < 5 + 2x < 1$; |
| г) $2 < -10 + 6x \leq 8$; | з) $1 < 2 - 2x < 6$. |

10 Решите двойное неравенство:

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| а) $2x + 1 < 3x - 5 \leq 5x + 4$; | в) $2 + 5x \leq -x \leq 9 + 4x$; |
| б) $-10 - x < -2 + 2x \leq 7 + 8x$; | г) $-9 - 9x < 8 - x < 4 + 2x$. |

11 Решите двойное неравенство:

- | | |
|-----------------------------|---|
| а) $9 \leq x^2 \leq 16$; | в) $46 < -35x - 35x^2 < 49$; |
| б) $8 < x^2 + 2x \leq 15$; | г) $14 \leq 21 + 97x + 90x^2 \leq 78$. |

12 Решите совокупность неравенств:

- | | |
|---|--|
| а) $\begin{cases} 3x + 6 < 0, \\ 5x - 4 \geq 0; \end{cases}$ | д) $\begin{cases} -1 + x \geq 0, \\ 8 + 10x \leq 0; \end{cases}$ |
| б) $\begin{cases} -1 - 2x \geq 0, \\ -10 - 4x > 0; \end{cases}$ | е) $\begin{cases} -1 + 9x < 0, \\ 1 - 10x \leq 0; \end{cases}$ |
| в) $\begin{cases} 6x < 0, \\ -6 - 3x \geq 0; \end{cases}$ | ж) $\begin{cases} 2 + 7x \geq 0, \\ -3 + 3x \leq 0; \end{cases}$ |
| г) $\begin{cases} -9 - 8x \leq 0, \\ 2 + 8x > 0; \end{cases}$ | з) $\begin{cases} -8 + 4x < 0, \\ 3 + 4x \leq 0. \end{cases}$ |

13 Решите совокупность неравенств:

- | | |
|--|---|
| а) $\begin{cases} x^2 + 6x + 7 < 0, \\ 2x - 4 \geq 0; \end{cases}$ | в) $\begin{cases} 4x + 16x^2 \leq 0, \\ 2 - 9x < 0; \end{cases}$ |
| б) $\begin{cases} -40 - 36x + 4x^2 > 0, \\ 5 + 8x \geq 0; \end{cases}$ | г) $\begin{cases} -24 + 76x - 60x^2 > 0, \\ -6 - 8x > 0. \end{cases}$ |

14 Решите совокупность неравенств:

- | | |
|---|--|
| а) $\begin{cases} x^2 + 6x + 8 < 0, \\ x^2 + 4x + 3 \leq 0; \end{cases}$ | в) $\begin{cases} -4 - 4x + 24x^2 \geq 0, \\ -49 - 63x - 20x^2 < 0; \end{cases}$ |
| б) $\begin{cases} -12 + 18x + 12x^2 \geq 0, \\ -15 + 10x + 40x^2 \geq 0; \end{cases}$ | г) $\begin{cases} -20x - 12x^2 < 0, \\ 40 - 16x - 24x^2 > 0. \end{cases}$ |

15 Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \begin{cases} 3x - 5 < 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ 5x + 2 \geq -3; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 8 - 4x \leq 0, \\ -4 + x < 0, \\ -9 - 2x \geq 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 4 + 9x \geq 0, \\ 6 - 7x > 0, \\ 4x \geq 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 6 + 3x < 0, \\ 3 + x \geq 0, \\ -2 - 10x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

16 Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{3x-9}{x+1} < 0, \\ 5x+2 \geq 7; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} \frac{x-4}{3x+1} < \frac{1}{3}, \\ x^2 - 4x - 12 \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{-9-3x}{-2+8x} < 2, \\ -16+56x-24x^2 \geq 0; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} -32+80x-32x^2 \geq 0, \\ \frac{-8-x}{1+2x} \geq \frac{-2-10x}{-5+4x}; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{7-8x}{7-9x} \leq 7, \\ \frac{5-8x}{-5-4x} \geq 8; \end{cases} & \text{ж) } \begin{cases} -\frac{9}{-7+9x} > \frac{-10+4x}{4+9x}, \\ \frac{-3-2x}{-2-10x} \leq \frac{-10-2x}{5-10x}; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} -28-39x-8x^2 > 0, \\ -56-121x-63x^2 \geq 0; \end{cases} & \text{з) } \begin{cases} \frac{8+3x}{2+10x} \leq \frac{-4-x}{-2-8x}, \\ -16+86x-30x^2 > 20+42x-54x^2. \end{cases} \end{array}$$

П

17 Девятиклассник Валя утверждает, что множество решений системы неравенств является подмножеством множества решений совокупности тех же неравенств. Как вы считаете, прав ли Валя? Обоснуйте свой ответ.

18 Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{-7+10x+8x^2}{-12-50x-48x^2} \geq 0, \\ \frac{-36-22x+48x^2}{-10+32x-6x^2} < 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{-7+36x-32x^2}{-8-x+9x^2} \geq 0, \\ \frac{-40x+70x^2}{16-56x+40x^2} > 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{-80-2x+12x^2}{12-x-63x^2} < 0, \\ \frac{-48-2x+6x^2}{7+9x-10x^2} < 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{-16-24x-5x^2}{-56+80x-24x^2} \geq 0, \\ \frac{56-56x^2}{4+4x+x^2} < 0. \end{cases} \end{array}$$

19 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{7-4x}{-6+8x} \geq \frac{3-6x}{7x}, \\ \frac{4+4x}{-2-8x} \leq \frac{-4+9x}{4+4x}, \\ \frac{-5+3x}{2+4x} \leq \frac{6-x}{5+10x}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{7+10x}{3+3x} > \frac{4+10x}{-6-8x}, \\ 3x \geq \frac{-6-6x}{2-9x}, \\ \frac{-7-7x}{3-x} > -\frac{9x}{-10-7x}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1+2x}{-10+2x} \leq \frac{6+4x}{-8-6x}, \\ \frac{1+2x}{-4-6x} < \frac{6+4x}{-5+2x}, \\ \frac{4-8x}{4} > \frac{9+9x}{6-7x}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{-2+6x}{-9-5x} < \frac{5+x}{-6+9x}, \\ \frac{3-8x}{8+7x} \geq \frac{2-x}{-4-5x}, \\ \frac{4+4x}{-9-4x} > \frac{-5+3x}{7-3x}. \end{cases}$$

М

20 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{(8-9x)(10-2x)(1+6x)}{(8-2x)(-8+6x)(-4+9x)} < 0, \\ -\frac{3(-4-8x)x(7+7x)(-7+8x)}{(1-9x)(2-9x)(-9+2x)(5+4x)} < 0, \\ \frac{(-6-7x)(8-4x)(3+8x)(4+9x)}{4(9-9x)(2-8x)x(-3+7x)} > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{(9-10x)^2(8-x)^4(4+3x)^2(-4+5x)}{(-6+2x)(-4+4x)^3(-10+6x)^5(-1+9x)^2} > 0, \\ \frac{(1-9x)(9+2x)^2(-9+9x)^2(-1+10x)}{(-8-9x)^2(-5-9x)^3(3-9x)^2(7+7x)^2} < 0, \\ \frac{(5-7x)x^3(-3+4x)^5}{(-1-10x)^5(10-10x)^3(-6-5x)^2(-7+2x)} \geq 0; \end{cases}$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-9+2x)^2(-3+2x)^5(3+3x)^5(2+5x)^3}{(-2-x)(1+x)(3+x)^4(3+7x)^4} < 0, \\ \frac{7(9-10x)^4(-1-4x)(-2+9x)}{x(1+x)^2} < 0, \\ -\frac{(-4-x)^3(-10+x)^2(3+6x)(-3+7x)^2}{(5-4x)^3(-4+x)^5(-7+3x)^2} \leq 0; \end{array} \right.$$

$$r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(-5-10x)^3(10+2x)^3}{(-6-9x)^5(-3-4x)^3(-1-4x)} > 0, \\ \frac{(1+x)(10+x)^2(4+3x)^3}{(3-10x)(2-9x)} \geq 0, \\ -\frac{(4-10x)^2(-5-7x)^3(2-2x)^4}{(-2-4x)^2x^5(1+x)^4} < 0. \end{array} \right.$$

21 Решите систему неравенств:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-3-4x)^5(-7+2x)^5(10+8x)^3}{(-10-6x)^2(3-6x)(9-3x)^5} \leq 0, \\ \frac{72-8x-80x^2}{42+54x+12x^2} > 0, \\ -27+99x-30x^2 \geq 40-56x-48x^2; \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(30-15x)(-64x-80x^2)}{(-14-6x)(45-55x+10x^2)} \leq 0, \\ \frac{-16-52x+90x^2}{36-25x-25x^2} \geq 0, \\ -16-30x+25x^2 \leq 90+46x+4x^2, \\ 16+12x > -18+108x-90x^2; \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(-6+16x)(4x-x^2)(8-35x+12x^2)}{(-8x+10x^2)(6+61x+10x^2)(18+72x+40x^2)} \geq 0, \right. \\
 \text{в)} & \left(\frac{(-35+15x)(42+47x+10x^2)(-8+78x+20x^2)}{(36x-24x^2)(36+x-21x^2)(70-116x+48x^2)} \geq 0, \right. \\
 & \left. \frac{(-56-42x)(-4-10x+6x^2)(-16-42x+18x^2)}{(-14+69x-70x^2)(35-28x-63x^2)(-7+69x-54x^2)} > 0; \right. \\
 & \left(\frac{(-72+109x-40x^2)(-16+50x-6x^2)}{(-80+84x-16x^2)(27+84x+9x^2)} \geq 0, \right. \\
 \text{г)} & \left(\frac{(8-x)x}{(-1-8x)(-5+9x)} \geq 0, \right. \\
 & \left. \frac{8-7x}{9} < \frac{-2-9x}{5+10x}. \right.
 \end{aligned}$$



Исследовательский проект «Доказательство неравенства Коши* методом Штурма**»

- а) Докажите, что если одно из чисел a, b больше 1, а другое меньше 1, то $a + b > 1 + ab$.
- б) Докажите, что если произведение положительных чисел $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ равно 1, то $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n$.
- в) Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ выполняется неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n},$$

причём равенство достигается лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

Замечание. Левая часть неравенства Коши называется, как вы уже знаете, средним арифметическим n чисел $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$, а правая часть называется средним геометрическим n чисел $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$.

* Огюстен Луи Коши (1789–1857) — выдающийся французский математик.

** Р. Штурм — немецкий математик, предложивший в 1884 г. рассматриваемый метод доказательства неравенств.



Жизненная задача*

СИТУАЦИЯ. Строительство трассы.

ВАША РОЛЬ. Проектировщик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Прямолинейный отрезок федеральной трассы следует спроектировать так, чтобы сумма квадратов расстояний от населённых пунктов A, B, C, D до трассы была минимальной. Пункты расположены следующим образом: пункт B находится в направлении на восток от пункта A и удалён от него на расстояние 5 км; пункт D расположен в направлении на север от пункта A и удалён от него на расстояние 10 км; пункт C расположен восточнее линии, соединяющей пункты A и D , на 10 км и севернее линии, соединяющей пункты A и B , на 5 км.

ЗАДАНИЕ. Как должна пройти трасса?



* По мотивам задания, предлагавшегося в 2009 г. на заочном туре Всероссийского конкурса «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист», проводимого Финансовым университетом при правительстве Российской Федерации.



Вспоминаем то, что знаем

- Что такое график уравнения с двумя неизвестными?
- Что представляет собой график линейного уравнения с двумя неизвестными?
- Решите графическим методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Открываем новые знания

- Решите графическим методом систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ 3x + 2y = 14. \end{cases}$$



Как можно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными с помощью графиков уравнений этой системы?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

В курсе алгебры 7-го класса вы изучали системы линейных уравнений.

Для их решения вы применяли три метода: графический, метод подстановки и метод алгебраического сложения. Эти же методы служат и для решения других систем двух уравнений с двумя неизвестными, в которых могут содержаться уравнения второй степени или другие рациональные уравнения — как целые, так и дробные.

Начнём с графического метода.

Этот метод основан на том, что каждому уравнению с двумя неизвестными соответствует некоторое множество точек координатной плоскости (график этого уравнения). Построив графики уравнений, мы найдём точки пересечения этих графиков (если они есть), и пары чисел — координаты точек пересечения — будут представлять собой решения системы уравнений.

Найденные решения будут, вообще говоря, приближёнными, в зависимости от точности построений соответствующих графиков.

Таким образом, решить графически систему уравнений — значит найти общие точки графиков уравнений, входящих в систему.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Построим графики уравнений $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$.

Графиком первого уравнения является парабола, с вершиной в точке $(0; 1)$ и ветвями, направленными вверх, графиком второго — прямая, проходящая через точки $(0; 3)$ и $(-3; 0)$.

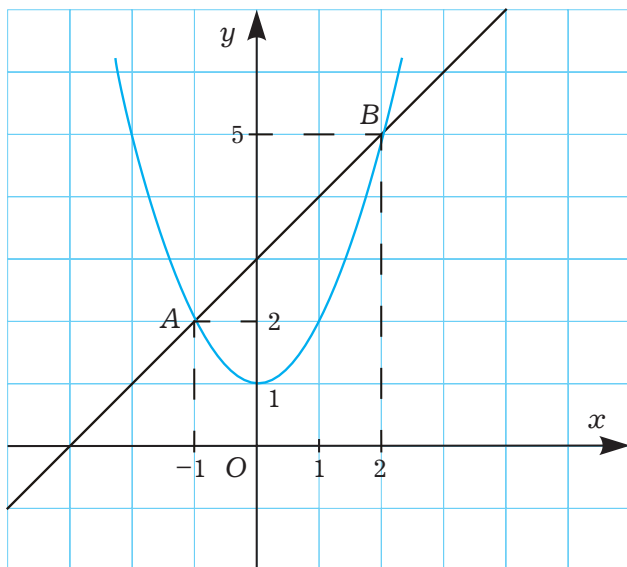


Рис. 65

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(2; 5)$ и $B(-1; 2)$.

Проверкой убеждаемся, что найденные пары чисел действительно являются решениями системы.

Ответ: $(2; 5)$ и $(-1; 2)$.

Пример 2. Выясним количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9. \end{cases}$$

Построим графики уравнений $x^2 + y^2 = 4$ и $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Графики этих уравнений — окружности. Центр первой окружности — начало координат, а её радиус равен 2; центр второй окружности — точка $P(1; -1)$, её радиус равен 3.

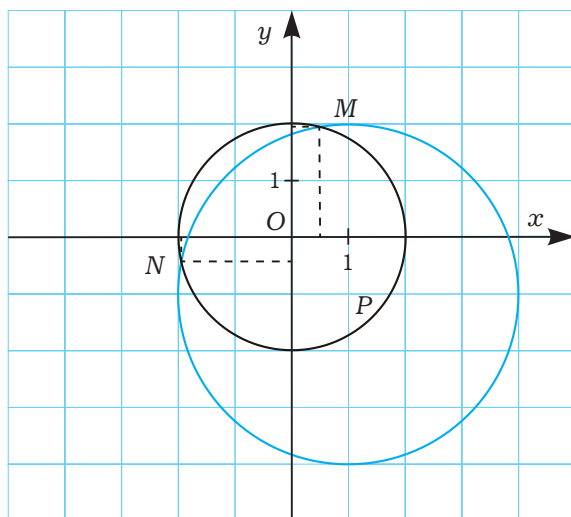


Рис. 66

Окружности пересекаются в двух точках M и N , координаты которых можно найти приближённо. Поскольку нам нужно определить только количество решений, мы делать этого не будем.

Ответ: Два решения.

Развиваем умения



Н

1 В чём суть графического метода решения систем уравнений? Приведите примеры применения метода.

2 Постройте графики уравнений:

а) $(x - 2y)(x + 2y) = 0$;

д) $(2x - y)^2 - (x + 3y)^2 = 0$;

б) $(x - 2y)(x + 6) = 0$;

е) $(x - y)^2 - (x + 3y)^2 = 0$;

в) $\frac{x + y}{x + 6} = 0$;

ж) $\frac{x + y}{x + 6} = 2$;

г) $\frac{x - 3}{y + 5} = 0$;

з) $\frac{x - 3}{y + 5} = 1$.

3 Постройте графики уравнений:

а) $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$;

д) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$;

б) $y = x^2 + 2x$;

е) $x = y^2 - 4y$;

в) $xy = 1$;

ж) $(x-3)(y+2) = 1$;

г) $(x+1)y = 1$;

з) $xy - x + y = 1$.

Н

4 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ xy = 12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 3y = 0, \\ xy = 12; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x + y = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ x = y^2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x + y = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ y = x^2; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ x + y = 1. \end{cases}$

5 Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = 5, \\ y + x^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y + 4 = x^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 5 = y^2? \end{cases}$

П

6 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ (x-1)^2 - y^2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ (x+1)^2 - y^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x^2 - 4y^2 = 0. \end{cases}$

7 Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x = y, \\ y^2 + 2y = x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2, \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 4x = y - 3, \\ y^2 + 2y = x + 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0? \end{cases}$

8 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x + 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 4x + 3. \end{cases}$

М

9 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 12, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

10 При каких значениях a окружность и прямая, заданные данными уравнениями, имеют одну общую точку:

а) $x^2 + y^2 = a$ и $x + y = 1$; б) $x^2 + y^2 = 1$ и $x + y = a$?

3.2

Решение систем уравнений методом подстановки



Вспоминаем то, что знаем

- Расскажите, как решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки.
- Решите систему линейных уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Открываем новые знания

- Как вы думаете, можно ли применять метод подстановки при решении систем, где не все уравнения являются линейными? При каком условии это удастся сделать?
- Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$



Как решить систему двух уравнений с двумя неизвестными методом подстановки?

Всякую ли систему двух уравнений с двумя неизвестными можно решить методом подстановки?

Ранее вы решали системы уравнений первой степени.

Теперь познакомимся с системами, в которых хотя бы одно уравнение не является линейным. Как и прежде, распространённым методом решения систем является метод подстановки.

Пример 1. Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 5, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

Пусть $(x; y)$ — решение системы.

Выразим x из уравнения $x - 2y = 3$:

$$x = 2y + 3.$$

Подставим найденное выражение в первое уравнение:

$$(2y + 3)y = 5.$$

Решим полученное уравнение:

$$2y^2 + 3y - 5 = 0,$$

$$y_1 = 1, y_2 = -2,5.$$

Найдём x :

$$x_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5, x_2 = 2 \cdot (-2,5) + 3 = -2.$$

Убедиться, что найденные пары чисел действительно являются решениями системы, можно подстановкой.

Ответ: $(5; 1), (-2; -2,5)$.

Чуть сложнее дело обстоит в следующем примере.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Пусть $(x; y)$ — решение системы.

Выразим y из линейного уравнения:

$$y = x + 1.$$

Подставим найденное выражение в первое уравнение системы:

$$2x^2 - x(x + 1) + 3(x + 1)^2 - 7x - 12(x + 1) + 1 = 0.$$

После преобразований получим:

$$2x^2 - 7x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -0,5, x_2 = 4.$$

Найдём y :

$$y_1 = -0,5 + 1 = 0,5, y_2 = 4 + 1 = 5.$$

Ответ: $(-0,5; 0,5), (4; 5)$.

Если это целесообразно, то можно осуществлять подстановку некоторого выражения «в целом».

Пример 3. Решим систему:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ (x - y)^2 - xy = -1. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение $x - y = 1$, тогда его можно переписать в виде:

$$1 - xy = -1, xy = 2.$$

Теперь выразим x через y из первого уравнения системы:

$$x = y + 1.$$

Подставим в полученное ранее уравнение $xy = 2$:

$$\begin{aligned} (y + 1)y &= 2, \\ y^2 + y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Корни этого уравнения: $y_1 = 1, y_2 = -2$.

Найдём x :

$$x_1 = 1 + 1 = 2, x_2 = -2 + 1 = -1.$$

Ответ: $(2; 1), (-1; -2)$.

Иногда решить систему можно, используя метод алгебраического сложения.

Пример 4. Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 - xy - 4y^2 + 5y = 1, \\ x^2 - xy + 3y^2 - 4y = -1. \end{cases}$$

Сложим уравнения, предварительно умножив первое уравнение на -1 . В результате получим:

$$7y^2 - 9y + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{7}$.

Подставим найденные значения в первое уравнение. Рассмотрим два случая:

1) $y = 1$, получим $x^2 - x = 0$, откуда $x_1 = 0, x_2 = 1$.

2) $y = \frac{2}{7}$, получим уравнение $49x^2 - 14x + 5 = 0$, корней нет.
Ответ: (0; 1), (1; 1).

Иногда упростить решение удаётся, используя различные варианты замены неизвестных.

Пример 5. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{x}{y} = a$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{a}$.

Второе уравнение системы примет вид:

$$a + \frac{1}{a} = 2\frac{1}{2}.$$

Решим полученное уравнение. Получим, умножая обе части на $2a$:

$$2a^2 - 5a + 2 = 0,$$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{x}{y} = 2 \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{1}{2},$$

$$x = 2y \text{ или } y = 2x.$$

Осталось решить методом подстановки линейные системы:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x = 2y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 3, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1), (1; 2).

Развиваем умения



Н

1 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - x = 0, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + x = 0, \\ x^3 + y = 5; \end{cases}$

$$в) \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0, \\ xy = 5; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x^2 + 2y + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 = 15; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} y^2 + 2y - 3 = 0, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} y^2 = 16, \\ x + y^2 = 25; \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} y^2 = 2y, \\ xy = -4; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

2 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x - y = 4, \\ xy + y^2 = 6; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y^2 = 4, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x^2 - 3y + 9 = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} x^2 + 4y - 8 = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 12; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} x - 2y = 2, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Н

3 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0, \\ x^2 + xy = 2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (2x+1)(y+2) = 0, \\ 4x^2 + 4x + y = 6; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} (x+y)(x-y) = 0, \\ 9x^2 + 16y^2 = 25; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} (x-3y)(x+2y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{x+5}{y-3} = 0, \\ x^2 + 2y^2 - y = 40; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} \frac{2y-3}{x+2} = 0, \\ x^2 + xy + 4y^2 = 10; \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} \frac{x-y-2}{x-3} = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 13; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} \frac{x+2y+3}{y-1} = 0, \\ x^2 + 4xy + 5y^2 = 10. \end{cases}$$

4 Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x^2 + xy + y^2 = 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - 2y = 6, \\ x^2 - xy + y^2 = 12; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} & \begin{cases} x - y = -2, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 13; \end{cases} \\ \text{г)} & \begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7; \end{cases} \\ \text{д)} & \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е)} & \begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 15 = 0; \end{cases} \\ \text{ж)} & \begin{cases} x - y = 2, \\ y^2 - 3xy + x^2 - x + y = -9; \end{cases} \\ \text{з)} & \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + 3xy + y^2 - x - y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

П

5 Решите систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x + y = 1, \\ (3x + y)(x - 3y) = 11; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = x - y, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 8x - 3y = 1, \\ (x + 2y)(8x - 3y) = 12; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = -x - 6y, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

6 Решите систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 + xy = 8, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x + y = 9; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 - 2xy = 1, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 16, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

7 Решите систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \frac{x - y}{x + y} = \frac{3}{7}, \\ xy = 10; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80. \end{cases}$$

8 Решите систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} x + y = 7, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{7}{12}; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} (x - y)(x + y) = 12, \\ x + y = 3(x - y); \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{20}; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} (x - y)(x + y) = 5, \\ x - y = 5(x + y). \end{cases}$$

9 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 7xy, \\ x - y = 3xy; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} (x + y) \cdot \frac{x}{y} = 20, \\ x + y + \frac{x}{y} = 9; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + y = 5 - xy, \\ x + y = \frac{6}{xy}; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + y + xy = 11. \end{cases} \end{array}$$

М

10 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + 3y = 4, \\ \frac{4}{x-2} + \frac{3}{2y+1} = -3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{x+4}{2} + \frac{2y+1}{6} = 3; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 3x + y = -4, \\ \frac{7}{x+2} - \frac{10}{y} = 6; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = 7, \\ \frac{x-2}{5} - \frac{2y-1}{10} = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

11 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x - y = -1, \\ \frac{4}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{3}{y} = 1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 - xy = 4, \\ y^2 - xy = -3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + y = 3, \\ \frac{4}{x^2} + \frac{8}{xy} - \frac{5}{y^2} = 0. \end{cases} \end{array}$$

12 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} |xy| = 4, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ |xy| = 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases} \end{array}$$



Знакомимся с новыми знаниями

Напомним, что при решении задач обычно действуют следующим образом:

- 1) обозначают буквами какие-нибудь неизвестные величины, выражают через них другие величины, составляют систему уравнений;
- 2) решают полученную систему;
- 3) отвечают на вопрос задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Периметр прямоугольника равен 34 см, а его диагональ 13 см. Найдите стороны прямоугольника.

Пусть x см — длина, y см — ширина ($x \geq y$), тогда периметр прямоугольника — $2(x + y)$ см.

Воспользуемся теоремой Пифагора: $x^2 + y^2 = 13^2$.

Получим систему:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$$

Решим систему. Выразим из первого уравнения y :

$$y = 17 - x.$$

Подставим во второе уравнение:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 169;$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0;$$

$$x^2 - 17x + 60 = 0.$$

Корни уравнения: $x_1 = 12$, $x_2 = 5$.

Найдём y : $y_1 = 5$, $y_2 = 12$.

С учётом условия $x \geq y$ получим ответ: длина — 12 см, ширина — 5 см.

Задача 2. Если произведение двух положительных чисел увеличить на первое из них, то получится 128. Если это же произведение увеличить на второе из них, то получится 135. Найдите эти числа.

Введём обозначения.

Пусть x — первое число, y — второе число.

Тогда: $xy + x$ — произведение, увеличенное на первое число, $xy + y$ — произведение, увеличенное на второе число.

Получим систему:

$$\begin{cases} xy + x = 128, \\ xy + y = 135. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$y - x = 7.$$

Дальше будем решать методом подстановки:

$$y = x + 7.$$

Подставим в первое уравнение выражение для y :

$$x(x + 7) + x = 128,$$

$$x^2 + 8x - 128 = 0.$$

Корни уравнения: $x_1 = 16$, $x_2 = -8$ (не подходит по смыслу задачи).

Найдём y из уравнения:

$$16y + 16 = 128, y + 1 = 8, y = 7.$$

Получим ответ: 16 и 7.

Развиваем умения



Н

- 1 Сумма двух чисел равна 19, а их произведение равно 84. Найдите эти числа.
- 2 Разность двух чисел равна 2, а разность их квадратов равна 16. Найдите эти числа.
- 3 Среднее арифметическое двух чисел равно 30, а среднее геометрическое равно 12. Найдите эти числа.

Н

- 4 Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 14 см, а площадь 24 см². Найдите длины катетов.
- 5 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов на 2 см больше другого. Найдите катеты треугольника.
- 6 Периметр прямоугольника равен 20 см, а его площадь 24 см². Найдите длины его сторон.
- 7 Найдите два последовательных числа, разность кубов которых равна 397.

П

- 8** Если числитель дроби увеличить на 3, а знаменатель уменьшить на 3, то получится дробь, обратная данной. Произведение числителя и знаменателя равно 40. Найдите дробь.
- 9** Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 8. Если число, составленное из этих же цифр, но взятых в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите число.
- 10** Длина прямоугольного участка на 10 м больше ширины. Если длину увеличить на 10 м, а ширину на 2 м, то площадь увеличится на 400 м^2 . Найдите площадь участка.
- 11** Два человека выходят одновременно из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 20 км. Скорость первого из них на 1 км/ч больше, поэтому он приходит в *B* на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого.
- 12** Некоторая сумма денег была разделена поровну между несколькими лицами. Если бы лиц было на 3 больше, то каждый получил бы на 5 руб. меньше, а если бы сумму денег увеличить на 60 руб., то каждый получил бы 30 руб. Определите сумму денег и число лиц.

М

- 13** Расстояние в 450 км пассажирский поезд проходит на 8 ч быстрее, чем товарный. Если скорость каждого из поездов увеличить на 5 км/ч , пассажирский поезд пройдёт это расстояние на 6 ч быстрее товарного. Найдите скорость каждого из поездов.
- 14** Два велосипедиста находятся на расстоянии в 28 км. Они выехали навстречу друг другу и встретились через 1 ч, но не остановились и продолжили свой путь. Первый проехал расстояние в 28 км на 35 мин быстрее, чем второй. Найдите скорость каждого.
- 15** Две трубы при совместном действии могут наполнить бассейн за 4 ч. Если сначала первая труба наполнит первую половину бассейна, а потом вторая труба — вторую, то наполнение бассейна будет закончено за 9 ч. За какое время может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?
- 16** Если к двузначному числу приписать цифру 6 и разделить полученное число на сумму его цифр, то в частном получится 42. Если цифру 6 приписать слева и разделить полученное число на квадрат суммы его цифр, то в частном получится 2, а в остатке 27. Найдите двузначное число.

- 17 Два парохода одновременно отошли от пристани в направлениях, перпендикулярных друг другу. Через полчаса после отплытия расстояние между ними было 15 км, а ещё через 15 мин оказалось, что один из пароходов был от пристани на 4,5 км дальше другого. Найдите скорости пароходов.



Проект «Симметричные системы уравнений с двумя неизвестными»

Уравнение с двумя неизвестными называется *симметричным*, если при перестановке этих неизвестных местами уравнение не меняется. Например, уравнение $x^2y + xy^2 - 3xy = 1$ симметричное, так как при перестановке входящих в него неизвестных оно приобретает вид $y^2x + yx^2 - 3yx = 1$, то есть не меняется. А вот уравнение $x^2y + x - 3xy = 1$ не симметричное, так как при перестановке входящих в него неизвестных оно приобретает вид $y^2x + y - 3yx = 1$, то есть меняется.

Система двух уравнений с двумя неизвестными называется *симметричной*, если каждое уравнение этой системы симметричное.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. В определении симметричной системы уравнений требуется, чтобы каждое уравнение в отдельности не менялось. Например, если в системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 32, \\ y^2 + xy = 32 \end{cases}$$

переставить местами неизвестные x и y , то получим систему:

$$\begin{cases} y^2 + yx = 32, \\ x^2 + yx = 32. \end{cases}$$

Видно, что система в целом не изменилась (уравнения поменялись местами по сравнению с первоначальной системой). Но такая система не является симметричной, так как каждое из уравнений в отдельности изменилось.

Убедитесь, что симметричные системы с двумя неизвестными x и y можно решать с помощью замены неизвестных:

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

Сначала научитесь выражать через неизвестные u и v выражения:

$$x^2 + y^2; \quad x^3 + y^3; \quad x^4 + y^4; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$



Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Распределение изделий по складам.

ВАША РОЛЬ. Логистик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1.

ЗАДАНИЕ. Сколько всего ящиков на двух складах?





Знакомимся с новыми знаниями

Бесконечной числовой последовательностью принято называть функцию, определённую на множестве всех натуральных чисел.

Конечная числовая последовательность — функция, определённая на множестве нескольких первых натуральных чисел.

В дальнейшем мы, как правило, будем говорить просто *последовательность*, подразумевая числовую последовательность (конечную или бесконечную).

Последовательность может быть задана различными способами, например, при помощи формулы, задающей соответствующую функцию.

В этом случае говорят, что дана формула общего (n -го) члена последовательности.

Пример 1. Рассмотрим последовательность:

$$a(n) = n^2, \text{ где } n \text{ — произвольное натуральное число.}$$

Тогда: $a(1) = 1, a(2) = 4, a(3) = 9, \dots, a(9) = 81, \dots$

Число $a(1)$ называют *первым членом* последовательности, $a(2)$ — её *вторым членом*, $a(3)$ — *третьим* и т.д. При этом члены последовательности обозначаются a_1, a_2, a_3 , то есть значение аргумента пишется не в скобках, а в виде индекса. Последовательность «в целом» будем обозначать так: (a_n) .

Другой способ задать последовательность — *рекуррентный*, что в переводе с латинского означает «возвращающийся». По-русски этот способ задания последовательности называется *возвратным*.

При рекуррентном задании последовательности указывают один или несколько первых членов последовательности и формулу, позволяющую найти любой член последовательности по предшествующим членам.

Пример 2. Последовательность (p_n) задана рекуррентно:

$$p_1 = 1, p_{k+1} = p_k + k, k \geq 2.$$

Найдём пять первых членов последовательности.

Значение $p_1 = 1$ — известно из условия.

Далее: $k=1$, $p_2 = p_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, то есть $p_2 = 2$;

$k=2$, $p_3 = p_2 + 2 = 2 + 2 = 4$, то есть $p_3 = 4$;

$k=3$, $p_4 = p_3 + 3 = 4 + 3 = 7$, то есть $p_4 = 7$;

$k=4$, $p_5 = p_4 + 4 = 7 + 4 = 11$, то есть $p_5 = 11$.

Ответ: 1; 2; 4; 7; 11.

Последовательность (a_n) называется возрастающей, если для любого номера n выполнено неравенство

$$a_{n+1} > a_n.$$

Последовательность (a_n) называется убывающей, если для любого номера n выполнено неравенство

$$a_{n+1} < a_n.$$

Можно сказать так: последовательность возрастающая, если каждый следующий член этой последовательности больше предыдущего; последовательность убывающая, если каждый следующий член этой последовательности меньше предыдущего.

Пример 3. Докажем, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{n}{n+1}$, возрастающая.

Действительно:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}, \quad a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Рассмотрим разность:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

$a_{n+1} - a_n > 0$, следовательно, $a_{n+1} > a_n$, что и требовалось доказать.

Развиваем умения



Н

1 🌐 Сформулируйте определение числовой последовательности. Перечислите известные вам способы задания числовой последовательности. Приведите примеры.

2 Запишите первые пять членов числовых последовательностей, заданных формулой общего члена:

а) $a_n = 3n - 1$;

в) $c_n = 2^n - 6n$;

б) $b_n = 9 - 3n$;

г) $d_n = n^2 - 2^n$;

$$\text{д) } a_n = n^2 - n; \quad \text{ж) } c_n = \frac{n^2 - n + 1}{n};$$

$$\text{е) } b_n = 2 - n - n^2; \quad \text{з) } d_n = \frac{2 - n^2}{n}.$$

3 Запишите первые пять членов числовых последовательностей, заданных рекуррентно:

$$\text{а) } a_1 = 2, a_{k+1} = (a_k - k)^2; \quad \text{в) } a_1 = 2, a_2 = 5, a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k;$$

$$\text{б) } a_1 = 1, a_{k+1} = (a_k + k)^2; \quad \text{г) } a_1 = 1, a_2 = 3, a_{k+2} = 4a_{k+1} + 3a_k.$$

4 Найдите шестой член последовательности, если $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ и при $k \geq 2$:

$$\text{а) } u_{k+1} = u_k + u_{k-1}; \quad \text{в) } u_{k+1} = u_k \cdot u_{k-1};$$

$$\text{б) } u_{k+1} = u_k - u_{k-1}; \quad \text{г) } u_{k+1} = \frac{u_k}{u_{k-1}}.$$

5 Задайте какой-нибудь формулой последовательность:

$$\text{а) } 2; 4; 6; 8; \dots;$$

$$\text{д) } 3; 8; 15; 24; \dots;$$

$$\text{б) } 1; 3; 5; 7; \dots;$$

$$\text{е) } -3; 8; -15; 24; \dots;$$

$$\text{в) } 5; 8; 11; 14; \dots;$$

$$\text{ж) } 0; 2; 6; 12; \dots;$$

$$\text{г) } 5; -8; 11; -14; \dots;$$

$$\text{з) } \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \dots$$

Н

6 Пусть (u_n) — последовательность двузначных чисел, взятых в порядке возрастания. Вычислите:

$$\text{а) } u_7;$$

$$\text{б) } u_{11};$$

$$\text{в) } u_{37};$$

$$\text{г) } u_{61}.$$

7 Пусть (z_n) — последовательность двузначных чисел, взятых в порядке убывания. Вычислите:

$$\text{а) } z_{17};$$

$$\text{б) } z_{21};$$

$$\text{в) } z_{40};$$

$$\text{г) } z_{88}.$$

8 Какие формулы задают возрастающие последовательности, а какие — убывающие:

$$\text{а) } a_n = 5 - 4n;$$

$$\text{д) } x_n = \frac{n}{n+1};$$

$$\text{б) } b_n = 3n - 1;$$

$$\text{е) } y_n = \frac{n+1}{n};$$

$$\text{в) } c_n = n^2 - 2n;$$

$$\text{ж) } z_n = 9 - n^2;$$

$$\text{г) } d_n = n^2 - 4n;$$

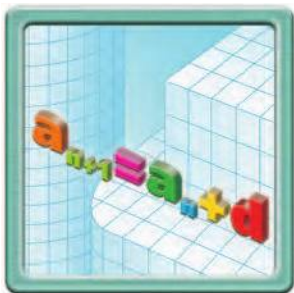
$$\text{з) } t_n = 9 + 4n - n^2?$$

П

- 9** Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 7n - 9$. Являются ли данные числа членами этой последовательности? Если да, укажите номер.
а) 51; б) -15; в) -9; г) -19.
- 10** Последовательность задана формулой $a_n = \frac{n+1}{n}$. Найдите произведения:
а) $a_k \cdot a_{k+1}$; в) $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot a_{k+3}$;
б) $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}$; г) $a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{k+m}$.
- 11** Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой:
а) $a_n = 20n - n^2$; в) $c_n = \frac{n+1}{n}$;
б) $b_n = n^2 - 6n$; г) $d_n = \frac{n}{n+1}$.
- 12** Укажите номера отрицательных членов последовательности:
а) $n^2 - 8n + 12$; в) $n^3 - 12$;
б) $n^2 - n - 2$; г) $n^3 + n - 6$.
- 13** Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - 2n$. Найдите:
а) x_{k+1} ; б) x_{k-1} ; в) x_{2k} ; г) x_{2k+1} .

М

- 14** Придумайте формулу общего члена для последовательности:
а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; в) $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \dots$;
б) $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \dots$; г) $\frac{1}{3}; \frac{1}{8}; \frac{1}{15}; \frac{1}{24}; \dots$
- 15** Задайте последовательность рекуррентно:
а) 1; 3; 5; 7; ...; в) 1; 3; 7; 13; ...;
б) 2; 4; 8; 16; ...; г) 1; -3; 7; -15;
- 16** Задайте рекуррентно последовательность, заданную формулой $a_n = n^2$.
- 17** Докажите, что последовательность, заданная формулой:
а) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, убывает; б) $b_n = \frac{3n-1}{4n+3}$, возрастает.
- 18** Найдите наименьший член последовательности, заданной формулой:
а) $y_n = (n-3)n(n+2)(n+5)$; б) $z_n = (n-6)(n-4)(n-2)n$.



Знакомимся с новыми знаниями

В последовательности чисел:

$$4; 7; 10; 13; \dots$$

каждое число на 3 больше предыдущего, то есть каждое число равно предыдущему числу, сложенному с числом 3.

В последовательности:

$$4; 2; 0; -2; -4; \dots$$

каждое число на 2 меньше предыдущего, то есть каждое число равно предыдущему числу, сложенному с числом -2 .

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым постоянным для данной последовательности числом (называемым *разностью арифметической прогрессии*).

Иначе говоря, арифметическая прогрессия — это последовательность, заданная рекуррентно:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Пример 1. Найдём три первых члена и разность арифметической прогрессии (a_n) , заданной рекуррентно:

$$a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 3.$$

Получим:

$$a_1 = 4, a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7, a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Найдём разность прогрессии.

Из условия задачи непосредственно следует:

$$a_{n+1} - a_n = 3.$$

Ответ: 4; 7; 10, $d = 3$.

Таким образом, если известно значение a_1 и d , то можно последовательно вычислить любой член прогрессии:

$$a_2 = a_1 + d, \text{ затем } a_3 = a_2 + d, a_4 = a_3 + d \text{ и т.д.}$$

Тем не менее уже для нахождения a_{100} , a_{1000} или $a_{10\,000}$ потребуется произвести большой объём вычислительной работы.

Выведем формулу n -го члена арифметической прогрессии (её также называют формулой общего члена).

Пусть a_1 и d – соответственно первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) . Тогда:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Выпишем цепочку равенств:

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, \dots, a_{n-1} - a_{n-2} = d, a_n - a_{n-1} = d.$$

Сложим эти равенства:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = (n-1)d.$$

Раскроем скобки и приведём подобные:

$$a_n - a_1 = (n-1)d, \text{ откуда } a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формула общего члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Пример 2. Запишем формулу общего члена арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = 4$, $a_2 = 8$.

По определению:

$$a_2 = a_1 + d, \text{ откуда } d = a_2 - a_1 = 4.$$

Из общей формулы следует, что

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)4 = 4n - 4 + 4 = 4n.$$

Ответ: $a_n = 4n$.

Пример 3. Найдём формулу общего члена арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = 6$, $a_{10} = 33$.

По определению:

$$a_{10} = a_1 + 9d, \text{ откуда } 9d = a_{10} - a_1 = 27 \text{ и } d = 3.$$

Запишем формулу:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 3.$$

Ответ: $a_n = 3n + 3$.

Пример 4. Найдём седьмой член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_2 = 2$, $a_4 = 18$.

По определению:

$$a_2 = a_1 + d, a_4 = a_1 + 3d, \text{ откуда } 2d = a_4 - a_2 = 16 \text{ и } d = 8.$$

Найдём a_7 :

$$a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6 \cdot 8 = 50.$$

Ответ: 50.

Определение арифметической прогрессии можно переформулировать следующим образом.

Последовательность (a_n) называется арифметической прогрессией, если разность соседних членов последовательности равна некоторому числу, постоянному для данной последовательности (разности прогрессии):

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Пример 5. Последовательность (a_n) задана формулой:

$$a_n = 3n + 2.$$

Проверим, является ли эта последовательность арифметической прогрессией. Найдём разность соседних членов последовательности:

$$a_{n+1} = 3(n+1) + 2, \quad a_n = 3n + 2,$$

$$a_{n+1} - a_n = 3.$$

Ответ: (a_n) — арифметическая прогрессия, разность которой $d = 3$.

Следующее утверждение объясняет, почему изучаемую нами последовательность назвали арифметической прогрессией.

Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Докажем это.

1) Если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то по приведённому выше второму определению арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad a_n - a_{n-1} = d.$$

Приравняем левые части равенств. Получим:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1},$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Отсюда получим требуемое:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

2) Если для последовательности (a_n) выполняется соотношение

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

то, умножая обе его части на 2, получим:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \text{ или } a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Переносим первое слагаемое каждой части последнего равенства в противоположную часть (со знаком «-»), получим:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

По второму определению арифметической прогрессии это и значит, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией.

Доказательство закончено.

Действуя аналогично, можно доказать также следующее свойство.

Последовательность чисел (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ где } n > k.$$

Попробуйте сделать это самостоятельно.

Пример 6. Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Найдём a_5 , если $a_2 = 9$ и $a_8 = 19$.

Воспользуемся последним из доказанных свойств:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ при } n = 5, k = 3.$$

$$\text{Получим: } a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}, \text{ откуда } a_5 = \frac{9 + 19}{2} = 14.$$

Ответ: 14.

Развиваем умения



Н

1

Сформулируйте определения. Приведите примеры:

- арифметической прогрессии;
- разности арифметической прогрессии.

2 🌐 Запишите формулу общего члена арифметической прогрессии. Приведите примеры.

3 🌐 Сформулируйте свойства арифметической прогрессии. Приведите примеры их применения.

4 Найдите разность арифметической прогрессии:

- | | |
|----------------------|--|
| а) $3; 1; \dots$; | д) $\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \dots$; |
| б) $3; -1; \dots$; | е) $-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \dots$; |
| в) $-3; 1; \dots$; | ж) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}; \dots$; |
| г) $-3; -1; \dots$; | з) $\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}; \dots$; |

5 Запишите три следующих члена арифметической прогрессии:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| а) $3; 8; \dots$; | д) $1; 2; 1,8; \dots$; |
| б) $-5; 2; \dots$ | е) $-0,2; 1,4; \dots$; |
| в) $-9; -6; \dots$; | ж) $-0,4; -1,4; \dots$; |
| г) $1; -1; \dots$; | з) $2,4; -1; \dots$. |

Н

6 Дана арифметическая прогрессия (a_n) , где $a_6 = 0,5$, $d = 5,5$. Найдите:

- | | | | |
|------------|---------------|------------|------------|
| а) a_7 ; | в) a_9 ; | д) a_5 ; | ж) a_3 ; |
| б) a_8 ; | г) a_{10} ; | е) a_4 ; | з) a_2 . |

7 Проверьте, является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная формулой:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| а) $a_n = 4n - 2$; | д) $a_n = 4 - n^2$; |
| б) $b_n = -n$; | е) $a_n = n^2 - 4n$; |
| в) $c_n = 3^n - 2^n$; | ж) $c_n = n \cdot 2^n$; |
| г) $d_n = \frac{5-n}{5}$; | з) $d_n = \frac{n^2 - n}{n}$. |

8 Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите:

- | | |
|--|--|
| а) a_{15} , если $a_1 = 2$, $d = 4$; | в) a_{31} , если $a_1 = 8,5$, $d = -0,4$; |
| б) a_{21} , если $a_1 = -3$, $d = -4$; | г) a_{100} , если $a_1 = -0,6$, $d = 0,4$; |

д) a_{126} , если $a_1 = 5$, $d = -1\frac{1}{5}$;

ж) a_{16} , если $a_1 = 4$, $d = 2\frac{2}{3}$;

е) a_{31} , если $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{3}$;

з) a_{15} , если $a_1 = -1$, $d = -5\frac{6}{7}$.

9 Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите a_n , если:

а) $a_1 = 1$, $d = 6$;

д) $a_1 = 3,5$, $d = -2,5$;

б) $a_1 = -2$, $d = -4$;

е) $a_1 = -3,5$, $d = 2,5$;

в) $a_1 = 2$, $d = -2$;

ж) $a_1 = 6,2$, $d = 2,8$;

г) $a_1 = -1$, $d = 5$;

з) $a_1 = -2,2$, $d = -2,8$.

10 Запишите формулу общего члена арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$;

д) $a_2 = -4$, $a_3 = 2$;

б) $a_1 = -1$, $a_2 = 4$;

е) $a_5 = 1$, $a_6 = 5$;

в) $a_1 = 6$, $a_2 = 4$;

ж) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$;

г) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$;

з) $a_2 = -7$, $a_5 = 18$.

П

11 В арифметической прогрессии (a_n) дано: $a_2 = -5$, $a_5 = 4$. Найдите:

а) a_8 ;

б) a_{11} ;

в) a_{14} ;

г) a_{17} .

12 Арифметическая прогрессия задана рекуррентно, $a_1 = 1$, $a_{k+1} = a_k + 4$. Найдите:

а) a_n ;

б) a_{n+5} ;

в) a_{n-5} ;

г) a_{n^2-n} .

13 При каком условии арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью d :

а) возрастает?

б) убывает?

14 При каких n члены арифметической прогрессии (a_n) : 24; 18; ...

а) положительны?

б) отрицательны?

15 Сколько членов содержит данная конечная арифметическая прогрессия:

а) 1; 3; ...; 19;

б) 5; 8; ...; 65;

в) -1; 4; ...; 220;

г) 9; 12; ...; 2007?

16 При каких значениях m данные числа составляют арифметическую прогрессию:

а) 1; m ; $14 - m$;

в) -1; m^2 ; $m - m^2$;

б) m ; $5 - 2m$; $m + 5$;

г) 4; $m + 2$; m^2 ?

17 Между числами 8 и 44 вставьте

а) два числа;

б) три числа;

в) четыре числа

так, чтобы полученные числа образовали арифметическую прогрессию.

- 18 Девятиклассник Валя утверждает, что последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия тогда и только тогда, когда a_n является линейной функцией от n . Как вы считаете, прав ли Валя? Обоснуйте свой ответ.

М

- 19 В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_2 = 4$. Сколько в прогрессии членов, меньших 55?
- 20 В арифметической прогрессии $a_{m+n} = a$, $a_{m-n} = b$. Найдите a_m .
- 21 Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?
- 22 В арифметической прогрессии сумма второго и четвертого членов равна 7, а сумма шестого и восьмого членов равна 23. Найдите сумму третьего и седьмого членов этой прогрессии.
- 23 Свободно падающее тело проходит за первую секунду 4,9 м, а за каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние будет пройдено телом за шестую секунду?
- 24 Выписано по двадцать начальных членов арифметических прогрессий (a_n) : 4; 7; ... и (b_n) : 5; 9; Сколько в полученных двух множествах одинаковых чисел?

4.3

Сумма n первых членов арифметической прогрессии



Вспоминаем то, что знаем

- Что называется арифметической прогрессией?
- Запишите формулу n -го члена арифметической прогрессии.

Открываем новые знания

- Как связаны между собой суммы членов арифметической прогрессии $a_m + a_n$ и $a_p + a_s$, если $m + n = p + s$?

- Запишите сумму первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Перепишите слагаемые этой суммы в обратном порядке:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1,$$

после чего сложите почленно записанные равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Что вы можете сказать о суммах, стоящих в каждой скобке?



Как найти сумму первых n членов арифметической прогрессии? Запишите соответствующую формулу.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Запишем сумму последовательных натуральных чисел от 1 до 999:

$$S = 1 + 2 + \dots + 998 + 999.$$

Перепишем слагаемые этой суммы в обратном порядке:

$$S = 999 + 998 + \dots + 2 + 1.$$

Сложим полученные равенства:

$$2S = (1 + 999) + (2 + 998) + \dots + (998 + 2) + (999 + 1).$$

Сумма чисел в каждой из 999 скобок равна 1000, поэтому

$$2S = 999 \cdot 1000, \text{ откуда } S = 999 \cdot 500 = 499\,500.$$

Получили, что искомая сумма равна 499 500.

Прежде чем искать сумму арифметической прогрессии в общем виде, решим предварительно другую задачу.

Докажем, что если номера членов арифметической прогрессии (a_n) удовлетворяют соотношению $m + n = p + s$, то $a_m + a_n = a_p + a_s$.

Действительно:

$$a_m = a_1 + (m - 1)d, \quad a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$a_p = a_1 + (p - 1)d, \quad a_s = a_1 + (s - 1)d.$$

Тогда:

$$a_m + a_n = a_1 + (m - 1)d + a_1 + (n - 1)d = 2a_1 + (m + n - 2)d;$$

$$a_p + a_s = a_1 + (p - 1)d + a_1 + (s - 1)d = 2a_1 + (p + s - 2)d.$$

Равенство можно считать доказанным, так как $m + n = p + s$.

Найдём теперь сумму первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Перепишем слагаемые этой суммы в обратном порядке:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Сложим полученные равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Суммы чисел в каждой из n скобок равны.

$$2S_n = n(a_1 + a_n), \text{ откуда } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Полученную формулу можно переписать иначе:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Пример 1. Найдём сумму 26 первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -12$, $d = 2$.

Подставим данные в формулу:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Получим:

$$S_{26} = \frac{2 \cdot (-12) + 25 \cdot 2}{2} \cdot 26 = 338.$$

Ответ: 338.

Пример 2. Найдём сумму всех двузначных чисел, меньших 86.

Искомые двузначные числа образуют прогрессию, причём всего их $85 - 9 = 76$, $a_1 = 10$, $a_{76} = 85$.

Подставим данные в формулу:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Получим:

$$S_{76} = \frac{10 + 85}{2} \cdot 76 = 3610.$$

Ответ: 3610.

Пример 3. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых одиннадцати членов прогрессии.

Решение. Из условия задачи:

$$a_3 + a_9 = 8.$$

Выразим слагаемые через a_1 и d :

$$a_1 + 2d + a_1 + 8d = 8,$$

$$2a_1 + 10d = 8,$$

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 44.$$

Ответ: 44.

Развиваем умения



Н

- 1 Запишите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии в двух различных видах. Приведите примеры её применения. В каких случаях какой вид формулы предпочтительней?
- 2 Известно, что в арифметической прогрессии $a_2 + a_{16} = 14$. Найдите значение суммы:
а) $a_1 + a_{17}$; в) $a_5 + a_7 + a_{11} + a_{13}$;
б) $a_3 + a_{15}$; г) $a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}$.
- 3 Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии:
а) $a_1 = 2, d = 4, n = 11$; в) $a_1 = -5, d = -2, n = 8$;
б) $a_1 = -12, d = 2, n = 26$; г) $a_1 = 3, d = 5, n = 7$.

Н

- 4 Составьте формулу для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии:
а) $a_1 = -1, a_{k+1} = a_k + 3$; д) $a_1 = 0,4, a_{k+1} = a_k + 0,6$;
б) $a_1 = -4, a_{k+1} = a_k - 2$; е) $a_1 = 1,8, a_{k+1} = a_k - 0,2$;
в) $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k - 2$; ж) $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k + 4,2$;
г) $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k + 6$; з) $a_1 = -2, a_{k+1} = a_k - 1,2$.
- 5 Составьте формулу для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии:
а) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = 4n$;
б) $a_n = -2n + 9$; г) $a_n = 7 - 4n$;

$$\text{д) } a_n = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3};$$

$$\text{ж) } a_n = 2,5n - 1,5;$$

$$\text{е) } a_n = 1 - \frac{2}{3}n;$$

$$\text{з) } a_n = 2,5 - 1,5n.$$

6 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой:

$$\text{а) } S_{15} = 225, S_{20} = 200;$$

$$\text{д) } a_7 = 21, S_7 = 105;$$

$$\text{б) } S_8 = 32, S_{20} = 200;$$

$$\text{е) } a_8 = 21, S_8 = 56;$$

$$\text{в) } S_4 = 32, S_6 = 60;$$

$$\text{ж) } a_9 = 23, S_9 = 135;$$

$$\text{г) } S_5 = 65, S_{10} = 230;$$

$$\text{з) } a_{10} = -30, S_{10} = -120.$$

П

7 Найдите сумму первых n

а) натуральных чисел;

в) нечётных чисел;

б) чётных чисел;

г) чисел, кратных 3.

8 Сколько необходимо взять членов арифметической прогрессии 21; 18; ..., чтобы их сумма была равна нулю?

9 Седьмой член арифметической прогрессии равен 6. Найдите сумму первых тринадцати членов этой прогрессии.

10 Сумма четвёртого и пятого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

М

11 Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 8, а сумма восьми первых членов в три раза меньше суммы следующих девяти членов.

12 Найдите сумму всех трёхзначных натуральных чисел от 312 до 885.

13 Существует ли арифметическая прогрессия, у которой среднее арифметическое n первых её членов равно $2n$?

14 Сумма n первых членов последовательности (a_n) может быть найдена по формуле $S_n = 2n^2 + 3n$. Проверьте, является ли эта последовательность арифметической прогрессией.

15 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , у которой известно, что:

$$\text{а) } a_1 + a_2 + a_3 = 15, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80;$$

$$\text{б) } a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50.$$

- 16 Свободно падающее тело проходит за первую секунду расстояние 4,9 м, а за каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние будет пройдено телом за 6 секунд?

4.4

Геометрическая прогрессия



Знакомимся с новыми знаниями

В последовательности чисел:

$$2; 4; 8; 16; \dots$$

каждое число равно предыдущему числу, умноженному на число 2.

В последовательности:

$$-2; 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots$$

каждое число равно предыдущему числу, умноженному на число $-0,5$.

Геометрической прогрессией называют последовательность ненулевых чисел, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число (называемое *знаменателем геометрической прогрессии*).

Иначе говоря, геометрическая прогрессия может быть задана рекуррентно:

$$b_{n+1} = qb_n.$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что $q \neq 0$.

Пример 1. Найдём четыре первых члена геометрической прогрессии, заданной рекуррентно: $b_1 = 18$, $b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k$.

Получим:

$$b_1 = 18, b_2 = \frac{1}{3}b_1 = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6, b_3 = \frac{1}{3}b_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2, b_4 = \frac{1}{3}b_3 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Найдём знаменатель прогрессии.

Из условия задачи непосредственно следует:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $18; 6; 2; \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

Таким образом, зная b_1 и q , можно последовательно вычислить любой член прогрессии:

$$b_2 = qb_1, \text{ затем } b_3 = qb_2, b_4 = qb_3 \text{ и т. д.}$$

Определение геометрической прогрессии можно переформулировать следующим эквивалентным образом (второе определение геометрической прогрессии).

Последовательность называется геометрической прогрессией, если отношение соседних членов последовательности (следующего к предыдущему) равно некоторому числу, постоянному для данной последовательности (знаменателю прогрессии):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Пример 2. Проверим, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой:

$$u_n = 2 \cdot 3^n.$$

Для этого найдём отношение соседних членов последовательности:

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3.$$

Итак, (u_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$.

Выведем теперь формулу общего члена геометрической прогрессии.

Рассмотрим геометрическую прогрессию (u_n) , для которой известно:

$$u_1 \text{ и } u_{n+1} = qu_n.$$

Выпишем цепочку равенств:

$$\frac{u_2}{u_1} = q, \frac{u_3}{u_2} = q, \frac{u_4}{u_3} = q, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q, \frac{u_n}{u_{n-1}} = q.$$

Количество равенств в этой цепочке равно $n - 1$. Перемножим их:

$$\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \cdot \dots \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = q^{n-1}.$$

Сократим одинаковые множители и выразим u_n :

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}, \text{ откуда } u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$$

Получили следующий результат.

Общий член геометрической прогрессии (b_n) равен произведению первого члена прогрессии на знаменатель в степени, показатель которой равен количеству предшествующих членов:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Пример 3. Запишем формулу общего члена геометрической прогрессии, если $b_1 = 4$, $d = 2$.

Из общей формулы следует, что

$$b_n = b_1 \cdot d^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ: $b_n = 2^{n+1}$.

Пример 4. Найдём седьмой член геометрической прогрессии (b_n) , у которой $b_2 = 2$, $b_4 = 18$.

По определению:

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_4 = b_1 \cdot q^3, \quad \text{откуда } q^2 = \frac{b_4}{b_2} = 9.$$

Возможны два случая:

1) если $q = 3$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{2}{3}$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{2}{3} \cdot 3^6 = 2 \cdot 3^5 = 243$.

2) если $q = -3$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = -\frac{2}{3}$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = -\frac{2}{3} \cdot (-3)^6 = -2 \cdot 3^5 = -243$.

Ответ: ± 243 .

Следующее свойство объясняет, почему изучаемую нами последовательность назвали геометрической прогрессией.

Последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член последовательности, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Это утверждение получается из следующего более общего утверждения.

Последовательность ненулевых чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого члена последовательности, начиная со второго, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Докажем это утверждение.

1) Если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то по приведённому выше второму определению геометрической прогрессии имеем:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = q.$$

Приравняем левые части равенств. Получим:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}, \text{ откуда}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

2) Если для последовательности (b_n) выполняется соотношение

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},$$

то, разделив обе его части на произведение $b_n \cdot b_{n-1}$ (ведь все числа ненулевые!), получим:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

По второму определению геометрической прогрессии это и значит, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

Доказательство закончено.

Можно доказать и более общее свойство.

Последовательность ненулевых чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$u_n^2 = u_{n-k} \cdot u_{n+k}, \text{ где } n > k.$$

Попробуйте сделать это самостоятельно.

Пример 5. Известно, что последовательность чисел 3; x ; 27 является геометрической прогрессией. Найдём x .

Воспользуемся свойством 3. Получим:

$$x^2 = 3 \cdot 27, \text{ откуда } x^2 = 9^2.$$

Ответ: ± 9 .

Развиваем умения



Н

1

а) Сформулируйте определение геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии. Приведите примеры.

б) Запишите формулу общего члена геометрической прогрессии.

2

Сформулируйте свойства геометрической прогрессии. Приведите примеры.

3

Какие последовательности из предложенных являются геометрическими прогрессиями:

- а) 10; 8; 6; 4; д) $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$;
 б) 1; 4; 9; 16; е) $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$;
 в) 1; -4; 16; -64; ж) $3; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}$;
 г) 1; 2; 4; 8; з) $1; 1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}; 3\frac{3}{8}$;

4 Найдите знаменатель геометрической прогрессии (u_n) :

- а) $u_1 = 12, u_2 = 36$; д) $u_1 = \sqrt{3}, u_2 = 3$;
 б) $u_1 = 25, u_2 = -5$; е) $u_1 = 6, u_2 = -3\sqrt{3}$;
 в) $u_1 = 15, u_2 = -45$; ж) $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 2\sqrt{2}$;
 г) $u_1 = 40, u_2 = 20$; з) $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Н

5 Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Найдите:

- а) b_1 ; в) b_7 ; д) $b_6 + b_3$; ж) $\frac{b_8}{b_6}$;
 б) b_5 ; г) b_6 ; е) $b_2 \cdot b_5$; з) b_3^2 .

6 Найдите шестой член геометрической прогрессии:

- а) $\frac{1}{2}; 2; \dots$; в) $8; 12; \dots$; д) $81; 16; \dots$; ж) $2; \frac{1}{2}; \dots$;
 б) $\frac{1}{2}; -2; \dots$; г) $8; -12; \dots$; е) $81; -16; \dots$; з) $2; -\frac{1}{2}; \dots$

7 Найдите n -й член геометрической прогрессии:

- а) $b_1 = 7, q = 2, n = 5$; в) $b_1 = 5, q = 3, n = 4$;
 б) $b_1 = 27, q = \frac{1}{3}, n = 4$; г) $b_1 = 186, q = \frac{1}{2}, n = 6$.

8 Запишите формулу общего члена геометрической прогрессии:

- а) $2; 3; \dots$; в) $1; -1; \dots$; д) $10; 8; \dots$; ж) $-6; 3; \dots$;
 б) $\sqrt{3}; 3; \dots$; г) $\sqrt{2}; -\sqrt{8}; \dots$; е) $9; 12; \dots$; з) $-16; 8; \dots$

9 Найдите x , если данные числа образуют геометрические прогрессии.

а) $3; x; 12$; д) $x - \frac{3}{4}; x; x + \frac{3}{4}$;

б) $-48; x; -27$; е) $\frac{2}{3}; x; \frac{3}{8}$;

в) $x - 1; \sqrt{2}; x$; ж) $x - 8; -3; x$;

г) $6; x; 2$; з) $-\frac{3}{5}; x; \frac{5}{3}$.

П

10 Придумайте геометрическую прогрессию, у которой первые пять членов целые числа, а остальные — не целые.

11 В геометрической прогрессии найдите:

а) u_8 , если $u_5 = 1$, $u_7 = 9$;

в) w_{13} , если $w_{10} = 1$, $w_{12} = 6$;

б) v_2 , если $v_3 = 4$, $v_5 = 2$;

г) p_2 , если $p_1 = -2$, $p_3 = -4$.

12 Между числами 135 и 40 вставьте два числа так, чтобы полученная последовательность являлась геометрической прогрессией.

13 Между числами 5 и 405 вставьте три числа так, чтобы полученная последовательность являлась геометрической прогрессией.

14 Третий член геометрической прогрессии равен 2, а пятый 486. Найдите произведение второго и шестого членов прогрессии.

15 Известно, что последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Проверьте, является ли геометрической прогрессией последовательность (u_n) :

а) $u_n = \frac{1}{b_n}$;

б) $u_n = -b_n$;

в) $u_n = b_n^2$;

г) $u_n = b_n + 1$.

16 Дана геометрическая прогрессия (b_n) с первым членом b_1 и знаменателем q . Упростите выражение:

а) $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_2 + b_3 + b_4}$;

в) $\frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_3 + b_4 + b_5}$;

б) $\frac{b_1 - b_2 + b_3}{b_2 - b_3 + b_4}$;

г) $\frac{b_1 - b_2 + b_3}{b_4 - b_5 + b_6}$.

17 Дана геометрическая прогрессия (b_n) . Проверьте равенства:

а) $\frac{b_{n+5}}{b_n} = \frac{b_6}{b_1}$; в) $\frac{b_{n+k}}{b_n} = \frac{b_{k+1}}{b_1}$;
б) $\frac{b_{n+5}}{b_n} = \frac{b_{n+9}}{b_{n+4}}$; г) $\frac{b_{n+k}}{b_n} = \frac{b_{m+k}}{b_m}$.

18 Существует ли геометрическая прогрессия, у которой произведение любых двух членов тоже является членом этой прогрессии?

19 Дана формула общего члена некоторой последовательности. Проверьте, является ли данная последовательность геометрической прогрессией:

а) $a_n = 2n + 5$; б) $b_n = n(n-1)$; в) $c_n = 2^n$; г) $d_n = (-2)^n$.

М

20 В геометрической прогрессии $u_{m+n} = p$, $u_{m-n} = r$. Найдите u_m .

21 Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию? Если нет, объясните, почему. Если да, установите, чему может равняться знаменатель этой прогрессии.

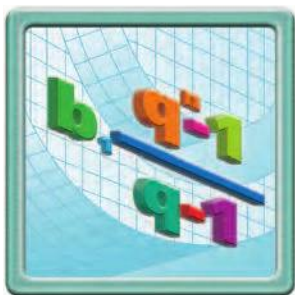
22 Придумайте геометрическую прогрессию, у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

23 Сформулируйте условие, при котором геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q является:

а) возрастающей; б) убывающей.

4.5

Сумма n первых членов геометрической прогрессии



Умножьте для этого обе части равенства на 2:

$$2S_{10} = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11},$$

после чего вычтите из второго равенства первое.

Что у вас получилось?

🌍 Запишите сумму первых n членов геометрической прогрессии, у которой $q \neq 1$:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Умножьте для этого обе части равенства на q , после чего вычтите из второго равенства первое.

Что у вас получилось? Как теперь можно найти S_n ? Где использовалось условие $q \neq 1$?

🌍 Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии, у которой $q = 1$.



Как найти сумму первых n членов геометрической прогрессии, у которой $q \neq 1$? Запишите соответствующую формулу.

Как найти сумму первых n членов геометрической прогрессии, у которой $q = 1$? Запишите соответствующую формулу.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Запишем сумму первых 10 членов геометрической прогрессии, заданной рекуррентно: $u_1 = 1$, $q = 2$:

$$S_{10} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}.$$

Умножим обе части равенства на 2. Получим:

$$2S_{10} = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11}.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$S_{10} = 2^{11} - 2^{10} + 2^{10} - \dots + 2^2 - 2 + 2 - 1 = 2^{11} - 1.$$

Получим:

$$S_{10} = 2^{11} - 1.$$

Решим задачу в общем виде.

Рассмотрим геометрическую прогрессию (b_n) :

$$b_1 \text{ и } b_{n+1} = qb_n, \text{ где } q \neq 1.$$

Запишем сумму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Умножим обе части равенства на q . Получим:

$$qS_n = qb_1 + qb_2 + qb_3 + \dots + qb_n.$$

Воспользуемся равенством $b_{n+1} = qb_n$:

$$b_2 = qb_1, b_3 = qb_2, \dots b_{n+1} = qb_n.$$

Получим:

$$qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{n+1}.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$(q-1)S_n = b_{n+1} - b_n + b_n - \dots + b_3 - b_2 + b_2 - b_1 = b_{n+1} - b_1.$$

То есть:

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}.$$

Формулу можно записать немного иначе:

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Получили следующие результаты.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии ($q \neq 1$):

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \text{ или } S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}.$$

Проверьте самостоятельно, что если в геометрической прогрессии $q=1$, то $S_n = nb_1$.

Пример 1. Вычислим сумму геометрической прогрессии, если известно, что $b_1 = 24$; $q = -\frac{1}{2}$, $n = 8$.

Воспользуемся формулой:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Получим:

$$S_8 = 24 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = 24 \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right) \cdot (-2^8)}{-\frac{3}{2} \cdot (-2^8)} = \frac{24 \cdot (2^8 - 1)}{3 \cdot 2^7} = \frac{2^8 - 1}{2^4} = 15\frac{15}{16}.$$

Ответ: $15\frac{15}{16}$.

Если количество слагаемых в сумме неизвестно, удобно применять другую формулу.

Пример 2. Вычислим сумму геометрической прогрессии:

$$1 + 3 + 9 + \dots + 6561.$$

Воспользуемся формулой:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}.$$

Имеем: $u_1 = 1$, $q = 3$, $b_n = 6561$.

Получим:

$$S_n = \frac{6561 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 9841.$$

Ответ: 9841.

Не во всех случаях сумму первых членов геометрической прогрессии необходимо находить, применяя формулы суммы.

Пример 3. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель равен -4 . Найдите сумму первых шести членов прогрессии.

Решение. Из условия задачи следует, что:

$$S_3 = b_1 + b_1q + b_1q^2 = 39.$$

$$S_6 = S_3 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5,$$

$$S_6 = S_3 + q^3(b_1 + b_1q + b_1q^2) = S_3 + q^3S_3 = S_3(1 + q^3).$$

$$S_6 = 39 \cdot (1 + (-4)^3) = 39 \cdot (-63) = -2457.$$

Ответ: -2457 .

Пример 4. Найдём сумму:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{p-1} \text{ (при } a \neq 1 \text{)}.$$

Воспользуемся формулой:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Имеем: $b_1 = 1$, $q = a$, $n = p$.

Получим:

$$S = \frac{a^p - 1}{a - 1}.$$

То есть:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{p-1} = \frac{a^p - 1}{a - 1}.$$

Полученный результат можно записать в виде формулы.

$$a^p - 1 = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1)$$

Пример 5. Если $p = 6$, получим:

$$a^6 - 1 = (a - 1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1).$$

Развиваем умения



Н

- 1** Запишите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Приведите примеры применения этой формулы.

- 2** Дана формула суммы n первых членов геометрической прогрессии (b_n) :
 $S_n = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$. Найдите:

- | | | | |
|------------|------------|------------------|------------------|
| а) b_1 ; | в) s_3 ; | д) $s_2 - s_1$; | ж) $s_4 - s_3$; |
| б) q ; | г) s_5 ; | е) $s_3 - s_2$; | з) $s_5 - s_3$. |

- 3** Найдите сумму геометрической прогрессии (u_n) :

- | | |
|--|--|
| а) $u_1 = \frac{1}{2}; q = 4; n = 3$; | д) $u_1 = 2; q = \frac{1}{2}; n = 5$; |
| б) $u_1 = \frac{1}{2}; q = -4; n = 5$; | е) $u_1 = -76; q = 1; n = 100$; |
| в) $u_1 = 1; q = -2; n = 5$; | ж) $u_1 = 12; q = -\frac{1}{2}; n = 5$; |
| г) $u_1 = 10; q = -\frac{1}{5}; n = 6$; | з) $u_1 = 5; q = -1; n = 19$. |

Н

- 4** Запишите формулу для нахождения суммы первых n членов данной геометрической прогрессии:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| а) $1; -2; \dots$; | д) $1; 1; \dots$; |
| б) $1; -2; \dots$; | е) $1; -1; \dots$; |
| в) $8; 4; \dots$; | ж) $6; 4; \dots$; |
| г) $8; -4; \dots$; | з) $6; -4; \dots$. |

- 5** Найдите сумму n слагаемых:

- | | |
|------------------------------------|--|
| а) $3 + 3^2 + \dots + 3^n$; | в) $2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}$; |
| б) $3^3 + 3^4 + \dots + 3^{n+2}$; | г) $2^2 + 2^1 + 1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-(n-3)}$. |

6 Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии:

а) $b_1 = 4$; $b_n = 32$; $n = 4$;

в) $b_1 = 256$; $b_n = 32$; $n = 4$;

б) $b_1 = -\frac{1}{3}$; $b_n = -27$; $n = 3$;

г) $b_1 = \frac{1}{9}$; $b_n = 27$; $n = 6$.

7 Разложите на множители многочлен:

а) $a^4 - 1$;

б) $a^5 - 1$;

в) $a^6 - 1$;

г) $a^7 - 1$.

П

8 Докажите, что в геометрической прогрессии, имеющей чётное количество членов, отношение суммы членов, стоящих на чётных местах, к сумме членов, стоящих на нечётных местах, равно знаменателю прогрессии.

9 Сумма нескольких первых членов геометрической прогрессии равна 93, первый член равен 3, а знаменатель 2. Найдите количество членов прогрессии.

10 Докажите формулу:

$$a^p + 1 = (a + 1)(a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + a - 1), \text{ где } p \text{ — нечётное число.}$$

11 Разложите на множители многочлен:

а) $a^3 + 1$;

б) $a^5 + 1$;

в) $a^7 + 1$;

г) $a^9 + 1$.

М

12 Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвёртый равен 24.

13 Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвёртого её членов равна -20 . Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

14 Сумма первых четырёх членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель равен -3 . Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.

15 Вычислите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если разность между вторым и первым членом прогрессии равна 4, а между четвёртым и третьим равна 16.

16 Докажите формулу:

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1}).$$

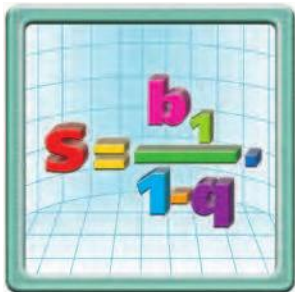
17 Разложите на множители многочлен:

а) $a^4 - b^4$;

б) $a^5 - b^5$;

в) $a^6 - b^6$;

г) $a^7 - b^7$.



Знакомимся с новыми знаниями

Если несколько чисел образуют геометрическую прогрессию, то среди них всегда найдётся наименьшее по модулю число; если же чисел, образующих геометрическую прогрессию, бесконечно много, то наименьшее по модулю число найдётся не всегда.

Можно доказать, что наименьшего по модулю числа нет только в так называемых бесконечно убывающих геометрических прогрессиях, к изучению которых мы и приступаем.

Геометрическая прогрессия

$$b_1; b_2; \dots; b_n; \dots$$

называется *бесконечно убывающей*, если модуль её знаменателя меньше 1:

$$|q| < 1.$$

Пример 1. Геометрическая прогрессия

$$1; -\frac{1}{2}; \dots; \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}; \dots$$

бесконечно убывающая, так как:

$$|b_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right|, \quad |b_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$|q| = \frac{1}{2^n} : \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Докажем теперь, что в любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии модуль любого члена прогрессии меньше модуля последующего члена прогрессии.

Действительно, пусть прогрессия задана формулой $b_n = b_1 q^{n-1}$, $|q| < 1$.

Тогда

$$|b_{n+1}| - |b_n| = |b_1 q^n| - |b_1 q^{n-1}| = |b_1 q^{n-1}| (|q| - 1) < 0, \text{ так как } |q| < 1.$$

Теперь поработаем с формулой суммы первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Перепишем её в виде:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = -\frac{b_1}{q - 1} + \frac{b_1}{q - 1} q^n,$$

$$S_n = -\frac{b_1}{q-1} + \frac{b_1}{q-1}q^n.$$

Можно доказать, что при неограниченном увеличении n выражение

$$x_n = \frac{b_1}{q-1}q^n$$

не просто уменьшается по модулю, что мы уже фактически доказали выше, а стремится к нулю. Тогда левая часть равенства стремится к S , где

$$S = -\frac{b_1}{q-1} = \frac{b_1}{1-q}.$$

Получили следующий результат.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 2. Найдём сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся формулой:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Получим:

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{9}.$$

Как нам известно, рациональные числа представимы в виде бесконечных периодических десятичных дробей. Перевести бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную можно, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 3. Запишем дробь $0,(15)$ в виде обыкновенной дроби.

Данную бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = 0,15$, а знаменатель $q = 0,01$:

$$0,(15) = 0,151515\dots = 0,15 + 0,0015 + 0,000015 + \dots$$

Воспользуемся формулой:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Получим:

$$S = \frac{0,15}{1-0,01} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}.$$

Пример 4. Запишем дробь $0,4(1)$ в виде обыкновенной дроби.

Представим бесконечную десятичную дробь в виде:

$$0,4(1) = 0,4 + 0,01 + 0,001 + \dots$$

Данную периодическую десятичную дробь можно представить в виде суммы числа $0,4$ и бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = 0,01$, а знаменатель $q = 0,1$.

Получим:

$$0,4(1) = 0,4 + S, \text{ где } S = \frac{0,01}{1-0,1} = \frac{1}{90}.$$

Таким образом:

$$0,4(1) = \frac{2}{5} + \frac{1}{90} = \frac{37}{90}.$$

Ответ: $\frac{37}{90}$.

Развиваем умения



Н

1 🌐 Какую геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей? Приведите примеры.

2 Докажите, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

а) $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{4};$

в) $b_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2};$

б) $b_1 = 4, b_2 = 2;$

г) $b_1 = -4, b_2 = 2.$

3 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , если известно, что:

а) $b_1 = 1, q = \frac{1}{3};$

в) $b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{2}{3};$

б) $b_1 = 1, q = -\frac{1}{3};$

г) $b_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{2}{3};$

$$\text{д) } b_1 = 6, q = \frac{1}{4};$$

$$\text{ж) } b_1 = 1, q = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{е) } b_1 = 5, q = -\frac{1}{4};$$

$$\text{з) } b_1 = 1, q = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Н

- 4** Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , заданной формулой общего члена:

$$\text{а) } b_n = 6 \cdot (0,1)^{n-1};$$

$$\text{д) } b_n = 2 \cdot (-0,1)^{n-1};$$

$$\text{б) } b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$\text{е) } b_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$\text{в) } b_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1};$$

$$\text{ж) } b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1};$$

$$\text{г) } b_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1};$$

$$\text{з) } b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

- 5** Запишите в виде несократимой обыкновенной дроби:

$$\text{а) } 0,(3);$$

$$\text{г) } 0,(28);$$

$$\text{ж) } 0,(45);$$

$$\text{к) } 0,5(6);$$

$$\text{б) } 0,(6);$$

$$\text{д) } 0,(19);$$

$$\text{з) } 0,(90);$$

$$\text{л) } 0,2(11);$$

$$\text{в) } 0,(12);$$

$$\text{е) } 0,(21);$$

$$\text{и) } 0,2(3);$$

$$\text{м) } 0,1(45).$$

П

- 6** Является ли данная последовательность, заданная формулой общего члена, бесконечно убывающей геометрической прогрессией:

$$\text{а) } a_n = -\frac{3}{2^n};$$

$$\text{в) } c_n = -\frac{4^n}{3^n};$$

$$\text{б) } b_n = \frac{2^n}{3^n};$$

$$\text{г) } d_n = \frac{8}{5^n}?$$

- 7** Прочитав в учебнике определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии, девятиклассник Валя остался ужасно недовольным. Он сказал: «Если взять геометрическую прогрессию (b_n) , у которой $b_1 = -1$, $q = \frac{1}{3}$, то

по определению она называется бесконечно убывающей. Но ведь хорошо видно, что эта последовательность возрастающая!» Что бы вы ответили Вале?

- 8** Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй её член равен 2, а сумма прогрессии равна 8.

- 9 Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что:

а) $b_1 = 1; S = \frac{1}{2};$ в) $b_1 = -1; S = \frac{3}{5};$

б) $b_1 = 1; S = \frac{2}{3};$ г) $b_1 = -1; S = 1\frac{1}{2}.$

М

- 10 Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, если:

а) $b_1 = 1, q = x, |x| < 1;$ в) $b_1 = 1, q = x^2, |x| < 1;$

б) $b_1 = 1, q = -x, |x| < 1;$ г) $b_1 = 1, q = -x^2, |x| < 1.$

- 11 Выполните действия. Результат представьте в виде несократимой обыкновенной дроби.

а) $5,(4) + 0,9(2);$ в) $5,(4) \cdot 0,9(2);$

б) $5,(4) - 0,9(2);$ г) $5,(4) : 0,9(2).$



Проект «Связь между арифметической и геометрической прогрессиями»

Существует ли какая-нибудь связь между арифметической и геометрической прогрессиями?



Проект «Первоначальное знакомство с последовательностью

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Напомним известное вам из курса 6-го класса правило работы с процентами:

Увеличить число на $x\%$ — всё равно что умножить это число на $\frac{100+x}{100}$.
Отсюда следует ещё одно правило:

Если увеличить число на $x\%$, затем то, что получилось, увеличить ещё на $x\%$ и так поступить k раз, то первоначальное число умножится на $\left(\frac{100+x}{100}\right)^k$.

Если внести ровно на один год некоторую сумму денег в банк, выплачивающий 100% годовых, то в конце года эта сумма умножится на $\frac{100+100}{100}$, то есть удвоится.

Если банк проводит выплату процентов два раза в год — по 50% через каждые полгода, — то в конце года первоначальная сумма увеличится в $\left(\frac{100+50}{100}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ раз.

Если банк проводит выплату процентов три раза в год — по $\frac{100}{3}\%$ через каждую треть года, — то в конце года первоначальная сумма увеличится в

$$\left(\frac{100 + \frac{100}{3}}{100} \right)^3 = \left(1 + \frac{1}{3} \right)^3 \text{ раз.}$$

Рассуждая аналогично, получим: если банк проводит выплату процентов n раз в год — по $\frac{100}{n}\%$ через каждую $\frac{1}{n}$ часть года, — то в конце года первоначальная сумма увеличится в

$$\left(\frac{100 + \frac{100}{n}}{100} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \text{ раз.}$$

Таким образом возникает последовательность $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

- а) Докажите, что последовательность (u_n) возрастающая, то есть $u_n < u_{n+1}$.
 б) Докажите, что при всех натуральных n выполняется неравенство $u_n < 3$.



Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Аннуитетные платежи.

ВАША РОЛЬ. Банковский работник.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Банк выдаёт кредит на 3 года под 12% годовых, который будет погашаться равными по величине ежемесячными платежами*.

ЗАДАНИЯ.

- а) Какую часть от суммы кредита составляет величина ежемесячного платежа?
 б) Рассчитайте сумму ежемесячного платежа для кредита 300 000 рублей.

* Такие платежи называются аннуитетными.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

К главе I

Квадратичная функция

- 1** Найдите дискриминант квадратного трёхчлена и установите, при каких значениях параметра a трёхчлен имеет хотя бы один корень:

а) $x^2 + (a-2)x + a^2$; в) $(a^2 + a + 1)x^2 + (a-2)x - 1$;

б) $(3-a)x^2 - ax - a - 3$; г) $\frac{1}{a}x^2 + \frac{a}{a-1}x + \frac{a}{a-1}$.

- 2** Выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена:

а) $ax^2 + bx + c$; в) $-\frac{16}{45}x^2 - \frac{8}{45}x + \frac{314}{45}$;

б) $-\frac{79}{3} - 10x - \frac{3x^2}{4}$; г) $\frac{9}{14}x^2 + \frac{96}{35}x - \frac{888}{175}$.

- 3** Разложите квадратный трёхчлен на множители с помощью выделения полного квадрата:

а) $ax^2 + bx + c (D \geq 0)$; в) $-\frac{5}{6}x^2 - \frac{261}{32}x - \frac{3}{2}$;

б) $-2x^2 + \frac{7}{15}x + \frac{6}{5}$; г) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{19}{10}x + 1$.

- 4** Разложите квадратный трёхчлен на множители, найдя его корни с помощью дискриминанта:

а) $\frac{25}{6}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{3}$; в) $-\frac{50}{7}x^2 + \frac{29}{3}x - \frac{28}{15}$;

б) $-2x^2 - \frac{269}{144}x + 3$; г) $-\frac{5x^2}{3} + \frac{41x}{9} + \frac{10}{3}$.

- 5** Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $ax^2 + bx + c (D \geq 0)$; д) $x^2 + \frac{11}{15}x - \frac{14}{15}$;

б) $x^2 + \frac{29}{7}x + \frac{4}{7}$; е) $x^2 + 18x + 80$;

в) $x^2 + 8x + 15$; ж) $\frac{x^2}{2} - \frac{4x}{7} - \frac{5}{4}$;

г) $-\frac{1}{36}x^2 + \frac{20}{27}x - \frac{16}{9}$; з) $3x^2 + 9x - 6$.

- 6** Сократите дробь:

а) $\frac{42 - 92x + 48x^2}{-21 + 46x - 24x^2}$; б) $\frac{36 + 26x + 4x^2}{40 - 16x - 18x^2}$;

$$в) \frac{7-76x+60x^2}{4-31x-90x^2};$$

$$г) \frac{35-15x-50x^2}{7-24x+20x^2}.$$

- 7** Найдите корни квадратного трёхчлена двумя способами: 1) разложив его на множители с помощью выделения полного квадрата; 2) найдя его корни с помощью дискриминанта:

$$а) 2\sqrt{\frac{3}{7}}x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{17}} - 2\sqrt{\frac{10}{21}}\right)x - \sqrt{\frac{10}{17}}; б) \frac{4}{\sqrt{3}}x^2 + \left(4\sqrt{\frac{2}{11}} - \frac{4}{\sqrt{13}}\right)x - 4\sqrt{\frac{6}{143}}.$$

- 8** Нарисуйте графики функций $y = \frac{x(x-1)(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{x^6-1}$ и $y = x$. Что у них общего? В чём их отличие?

- 9** Найдите корни квадратного трёхчлена $x^2 + (v-1)x + (v-1)$ в зависимости от параметра v .

- 10** Найдите для квадратного трёхчлена $x^2 - 47x + 1$ следующие выражения, зависящие от его корней x_1 и x_2 :

$$а) x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 2x_1^4x_2^2 + 4x_1x_2^3 - 4x_1^3x_2^3 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^4;$$

$$б) \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^4x_2^3 + x_1^3x_2^4}{x_1^2x_2^2}.$$

- 11** Перечислите основные свойства функции $y = ax^2$. Как построить её график? Как понять, что точка (p, q) принадлежит графику функции $y = ax^2$?

- 12** Найдите a , если известно, что точка (p, q) ($p \neq 0$) принадлежит графику функции $y = ax^2$.

- 13** Для функции $y = ax^2$ сравните $y(u)$ и $y(v)$ при всех возможных значениях u , v и a .

- 14** Постройте на отрезке $x \in [-4; 4]$ график функции $y = ax^2$ при $a = 0; \frac{1}{8}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 2$.

- 15** Как получить график квадратичной функции $y = a(x+h)^2 + l$:

а) из графика функции $y = x^2$;

б) из графика функции $y = ax^2$;

в) из графика функции $y = A(Bx+C)^2 + D$?

- 16** Найдите значения функции $y = a(x+h)^2 + l$ при значениях аргумента, равных $x_n = \frac{\sqrt{n-l} - h\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, где n — целые числа, такие что $n \geq l$. При этом ветви параболы, задаваемой функцией y , направлены вверх.
- 17** Какие координаты имеет вершина параболы $y = a(x+h)^2 + l$ и как направлены её ветви?
- 18** Как график функции $y = a(x-h)^2 + l$ ($a \neq 0$) может быть получен из графика функции $y = \frac{A}{2}x^2 + 3ABx + \left(\frac{9}{2}A - \frac{3}{4}\right)B^2$? Известно, что $A \neq 0$.
- 19** Для следующих наборов чисел a, h, l постройте график квадратичной функции $y = a(x+h)^2 + l$:
- а) $a = 2; h = -\frac{3}{4}; l = \frac{1}{2}$; в) $a = 1; h = -1; l = 1$;
 б) $a = -\frac{3}{2}; h = \frac{5}{3}; l = -3$; г) $a = -2; h = 4; l = 0$.
- 20** Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(ax)$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$? при $a = -1$? при $-1 < a < 0$? при $a < -1$?
- 21** Известно, что числа a и b отличны от нуля. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = a \cdot f(bx + c)$?
- 22** Постройте графики функций $y = \frac{2}{3x-1}$ и $y = 2\sqrt{3x-1}$ по точкам и с помощью результатов задачи 21.
- 23** Как связаны коэффициенты h и l с коэффициентами a, b и c между двумя представлениями одной и той же квадратичной функции в виде $y = a(x+h)^2 + l$ и $y = ax^2 + bx + c$?
- 24** Используя результаты задачи 23, расскажите:
- а) каким образом график функции $y = 2x^2 - 12x + 20$ может быть получен из графика функции $y = 3x^2 + 18x + 25$?
- б) каким образом график функции $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ может быть получен из графика функции $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$?

- 25** Найдите координаты вершины параболы $y = (x - a)(x - b)$. Верно ли, что если квадратный трёхчлен $Ax^2 + Bx + C$ имеет корни, то вершина соответствующей ему параболы лежит на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(k, 0)$, где k — среднее арифметическое корней?
- 26** Найдите координаты вершины параболы $y = A(x - a)(x - b) + B$.
- 27** Какие координаты имеет вершина параболы и как направлены её ветви:
- а) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{10}x + \frac{8}{15}$; д) $y = x^2 - \frac{67}{14}x + \frac{9}{7}$;
 б) $y = -\frac{9}{2}x^2 - \frac{21}{4}x + \frac{15}{2}$; е) $y = -35x^2 - 7x$;
 в) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{10}x + \frac{9}{25}$; ж) $y = 40x^2 + 48x - 64$;
 г) $y = x^2 + \frac{41}{63}x + \frac{2}{21}$; з) $y = -4x^2 - 8x + 32$?
- 28** Найдите точки пересечения параболы с координатными осями:
- а) $y = -60x^2 + 48x - 9$; в) $y = 14x^2 + \frac{119}{3}x + \frac{35}{3}$;
 б) $y = 49x^2 + 49x + 12$; г) $y = \frac{7}{30}x^2 - \frac{13}{10}x + \frac{2}{3}$.
- 29** Когда парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси абсцисс?
- 30** Постройте график функции и перечислите её основные свойства:
- а) $y = x^2 - 3x - 18$; в) $y = \frac{1}{9}(3x - 1)(3x + 8)$;
 б) $y = (x - 4)(x - 1)$; г) $y = x^2 + \frac{9x}{4} + \frac{1}{2}$.
- 31** Когда функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет наибольшее, а когда наименьшее значение? Чему они равны?
- 32** При каком значении n параболы $y = nx^2 + x - \frac{1}{2}n$ и $y = x^2 + nx - n$ не имеют общих точек? Имеют единственную общую точку? Имеют две общие точки? Найдите координаты этих точек.

33 Постройте графики функций.

а) $y = \left| \frac{1}{2}x^2 - x \right| + \left| x + \frac{1}{2}x^2 \right|;$

д) $y = |x^2 - 1| - 2|x^2 - 4|;$

б) $y = |x^2 - 9| + |2x - 6|;$

е) $y = x^2 + 6x + |4x - 4|;$

в) $y = |x^2 - 2x| + 2x + 4;$

ж) $y = x^2 - 2|x| + 1;$

г) $y = |x^2 - 4| - x^2 - 4x + 4;$

з) $y = -x^2 - 4|x| + 5.$

34 Запишите уравнение параболы, проходящей через точки $(n-1, m-1)$, (n, m) , $(n+1, m+2n+1)$.

35 При каком значении n вершина параболы $y = x^2 + 2nx + n + 2$ лежит на
а) оси абсцисс; б) оси ординат?

36 Известно, что вершина параболы $y = x^2 + (2m^2 + 2m)x + m^4 + 15$ находится в точке $(2; 3)$. Найдите все значения m , при которых это возможно. Запишите уравнение параболы для каждого из найденных значений m .

37 Найдите все значения p , при которых параболы $y = 5x^2 + 2x - 2p$ и $y = -3x^2 - 6x$ имеют единственную общую точку. Для каждого из найденных значений p определите координаты этой точки.

38 Найдите все значения q , при которых параболы $y = x^2 + 4x + q$ и $y = -4x^2 + 3x - 4q$ не имеют общих точек.

39 Найдите все значения s , при которых парабола $y = -x^2 + 8x - 3$ и прямая $y = 2x + s$ имеют единственную общую точку. Для каждого из найденных значений s определите координаты этой точки.

40 Найдите все отрицательные значения k , при которых каждая из точек пересечения параболы $y = x^2 + 2x + k$ с осью абсцисс находится левее каждой из точек пересечения параболы $y = x^2 - 8x + 2k$ с осью абсцисс.

41 Найдите все положительные значения h , при которых корни квадратных уравнений $x^2 - 4x + h = 0$ и $x^2 - 6x + 5h = 0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет по два различных корня и между корнями каждого уравнения лежит ровно один корень другого уравнения.

42 Найдите все отрицательные значения r , при которых корни квадратных уравнений $x^2 + 4x + 3r = 0$ и $x^2 + 5x + r = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет по два различных корня и между корнями каждого уравнения нет ни одного корня другого уравнения.

- 1 Верно ли, что если числа s и p положительны, то $2s \leq p + 1 + \frac{s^2}{p+1}$?
- 2 Верно ли, что если дробь $\frac{m}{n} > 0$ больше дроби $\frac{p}{q} > 0$, то и $\sqrt{\frac{m}{n}} > \sqrt{\frac{p}{q}}$?
- 3 Когда число $a\sqrt{b}$ ($a > 0$) больше числа $\sqrt{c}$?
- 4 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):
 а) $\frac{195}{163}$ и $\frac{129}{68}$; в) $\sqrt{\frac{47}{11}}$ и $\frac{\sqrt{17}}{4}$; д) $\sqrt{2}$ и $\frac{359}{250}$;
 б) $-\frac{86}{41}$ и $-\frac{167}{28}$; г) $\sqrt{\frac{41}{33}}$ и $\sqrt{\frac{58}{65}}$; е) $1,74$ и $\sqrt{3}$.
- 5 Расположите в порядке возрастания числа:
 $-15; 2\sqrt{7}; 18; \sqrt{53}; 42; \sqrt{28}; 62; 91; -35; 79; -86; \frac{213}{5}; -54; 8,54; -90; \frac{111}{25}$.
- 6 Сравните числа:
 а) $\frac{99}{70}$ и $\sqrt{2}$; б) $\frac{281}{250}$ и $\sqrt{\frac{178}{141}}$.
- 7 Найдите приближение для числа $\sqrt{3}$ в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$, такой что a и b не превышают 100, которая при представлении её в виде десятичной дроби совпадала бы с $\sqrt{3}$ вплоть до третьего знака после запятой.
- 8 Сравните числа ($<$, $>$, $=$):
 а) $\sqrt{11}$ и $2\sqrt{3} - 0,1$; в) $\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ и $\frac{1}{2+\sqrt{11}-\sqrt{2}}$;
 б) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; г) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ и $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{10}}{\sqrt{3}-\sqrt{10}}$.
- 9 Оцените массу, объём и площадь поверхности цилиндрической заготовки, длина которой заключена в пределах от 1 см до 9 см, а диаметр — от 0,5 см до 2 см, причём плотность металла, из которого её изготавливают, заключена в пределах от 5 г/см³ до 6 г/см³.
- 10 Оцените сумму и произведение трёх положительных чисел x , y и z , если:
 а) $1 < x < 5; 7 < y < 8; \frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}$;
 б) $11 < x < 22; 1 < y < 100; 1 < z < 2$;
 в) $a < x < b; c < y < d; n < z < m$ ($a, b, c, d, n, m > 0$).

- 11** Известно, что $11 < x < 15$; $3 < y < 4$; $1 < z < 2$. Оцените значения следующих выражений:

а) $2x - 3y - 4z$; в) $1,2x - 0,4y^2 - 5z^3$;

б) $z^2 + \frac{2}{3}xy$; г) $\frac{x-7z}{y+3z}$.

- 12** Известно, что $-9 < x < 9$; $2 < y < 11$, $-5 < z < -1$. Оцените значения следующих выражений:

а) $xy + yz + xz$; б) $xyz - x + 2y - 3z$.

- 13** Зная, что $1,3 < \sqrt{2} < 1,5$, $1,6 < \sqrt{3} < 1,8$, $2,1 < \sqrt{5} < 2,3$, оцените число $\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{2}}$.

- 14** Известно, что x и a — положительные числа. Докажите, что $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$.
Используя это свойство, докажите, что $\frac{50035005}{10003} - \sqrt{10001} > 0$.

- 15** Изобразите промежуток на числовой прямой:

а) $(a; b)$; в) $[a; b)$; д) $[a; +\infty)$; ж) $(-\infty; a]$;

б) $[a; b]$; г) $(a; b]$; е) $(a; +\infty)$; з) $(-\infty; a)$.

- 16** Изобразите на числовой прямой и запишите в виде интервала (или объединения интервалов) множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $\frac{6x-3}{-6-6x} > 1$; в) $\frac{(8+5x)(2-3x)}{(10+5x)(9+5x)} \geq 0$;

б) $\frac{10+2x}{-7-4x} < \frac{-8+8x}{8-4x}$; г) $6x^2 + 6x - 36 \geq 0$.

- 17** Составьте неравенство, решением которого служило бы множество:

а) $(-1; 1) \cup (5; 6] \cup [7; 8)$; б) $(-5; 3] \cup [4; 7] \cup \{8\} \cup (9; 10) \cup (10; +\infty)$.

- 18** Как проверить, заключено ли число x в интервале:

а) $(a; b)$; в) $[a; b)$; д) $[a; +\infty)$; ж) $(-\infty; a]$;

б) $[a; b]$; г) $(a; b]$; е) $(a; +\infty)$; з) $(-\infty; a)$?

19 Укажите все целые числа, принадлежащие интервалу:

а) $[-\sqrt{17}; \sqrt{19}]$; в) $[\sqrt{1000}; \sqrt{1100}]$;
б) $(123; 12\sqrt{123})$; г) $(7(\sqrt{2} + \sqrt{5}); 7(\sqrt{3} + \sqrt{7}))$.

20 Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие интервалу:

а) $\left(-\frac{165}{137}; \frac{675}{269}\right)$; в) $[\sqrt{123}; \sqrt{321}]$;
б) $\left[-\frac{375}{302}; \sqrt{13} + \sqrt{15}\right)$; г) $\left(\frac{895}{933}; \frac{188}{75}\sqrt{12}\right]$.

21 Найдите пересечение интервалов:

а) $(-2; 19)$, $[-11; 13]$, $(-\infty; 5]$, $[0; 44]$, $(-\infty; 13)$;
б) $[-1; \sqrt{12}]$, $(4; 5\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7}; \sqrt{19})$, $(-\infty; 21)$, $[3; 13]$.

22 Найдите объединение интервалов:

а) $(-\infty; -77]$, $(-77; -6]$, $(7; 9]$, $(-\sqrt{11}; \sqrt{13})$, $[-10; -8]$;
б) $(-1; 2)$, $[2; 7]$, $[11; +\infty)$, $(-17; 19)$, $(-22; -3)$, $(-3; 11)$.

23 Как проверить, что число a удовлетворяет неравенству $f(x) > 0$? $f(x) < 0$?
 $f(x) \geq 0$? $f(x) \leq 0$?

24 Может ли одно и то же число удовлетворять двум неравенствам? трём? пяти? миллиону?

25 Решите неравенство:

а) $-1 - \frac{4x}{9} \geq \frac{8}{7} + \frac{4x}{3}$; д) $\frac{10}{7} - \frac{7x}{10} \leq -\frac{2}{7} - \frac{2x}{9}$;
б) $-\frac{9}{8} - \frac{8x}{9} < \frac{7}{5} + \frac{x}{2}$; е) $\frac{5}{3} + 3x \geq -\frac{6}{7} - 3x$;
в) $-2 < -\frac{2}{9} - \frac{5x}{7}$; ж) $2 - x > \frac{9}{4} - x$;
г) $\frac{9}{10} - \frac{5x}{4} < 1 - \frac{5x}{6}$; з) $-\frac{4}{3} - 7x > \frac{1}{5} + x$.

26 Решите неравенство:

а) $\frac{4-7x}{8-10x} < \frac{-7+7x}{-3+4x}$; д) $\frac{8-5x}{10+9x} > \frac{-8+3x}{-1-x}$;
б) $\frac{-3-4x}{6+3x} < \frac{7-6x}{2+7x}$; е) $\frac{8+6x}{-2-3x} \geq \frac{6+x}{10-10x}$;

$$\text{в)} -\frac{9}{1+7x} \leq \frac{1}{6}(3+5x);$$

$$\text{ж)} \frac{-1-6x}{-2-3x} > -\frac{5}{6+3x};$$

$$\text{г)} \frac{-4+10x}{10+10x} < \frac{4+10x}{10x};$$

$$\text{з)} \frac{-4+8x}{-10-7x} > \frac{-4+3x}{1-8x}.$$

27 Решите неравенство:

$$\text{а)} \frac{-8-6x}{8} + \frac{4-x}{7} < \frac{-5+5x}{6};$$

$$\text{в)} \frac{4+2x}{5} + \frac{-7+9x}{6} \geq 8-x;$$

$$\text{б)} \frac{5+6x}{4} + \frac{7+8x}{10} < \frac{9+7x}{10};$$

$$\text{г)} \frac{x-2}{9} + \frac{6x}{5} > \frac{6+5x}{7}.$$

28 Решите неравенство:

$$\text{а)} (4+x)(-9+7x) + (2-5x)(-6+9x) \leq (-9-5x)(-6+3x);$$

$$\text{б)} (1-8x)(2-8x) + (-7-9x)(-8-3x) > (-2-2x)(-1+3x);$$

$$\text{в)} (5-2x)(-8+2x) + (-2-x)(-2+4x) > 7(8-5x);$$

$$\text{г)} (10-4x)(-1+x) + (-3-6x)(4+4x) \geq (-2+5x)(4+8x).$$

29 Найдите наибольшее и наименьшее целое решение неравенства:

$$\text{а)} \frac{(2+2x)(5+3x)}{(-1-8x)(-1+10x)} > 8;$$

$$\text{б)} \frac{7(6x-3)}{(-8-4x)(2x-7)} < -9.$$

30 При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

$$\sqrt{\frac{-5-7x}{6} - \frac{2+7x}{1-9x}} + \sqrt{\frac{-7-3x}{9-7x}} + \sqrt{\frac{(-7+3x)(-5+6x)}{(9-10x)(9-6x)}};$$

31 При каких значениях a уравнение

$$\frac{1}{46}(2a+8x)(8a+7x) = 9x(a-4x)$$

имеет положительный корень x ?

32 Решите квадратные неравенства методом схематической параболы:

$$\text{а)} 12 + 2x - 24x^2 \geq 0;$$

$$\text{д)} \frac{9}{2}x^2 - \frac{7}{5}x \geq 0;$$

$$\text{б)} 24 + 34x + 12x^2 \leq 0;$$

$$\text{е)} \frac{35}{18} - \frac{169}{720}x - \frac{1}{80}x^2 \leq 0;$$

$$\text{в)} -\frac{20}{27} - \frac{130}{9}x - 70x^2 > 0;$$

$$\text{ж)} \frac{21}{5} - \frac{40}{21}x - \frac{5}{21}x^2 > 0;$$

$$\text{г)} -\frac{5}{3} - \frac{13}{6}x + 5x^2 < 0;$$

$$\text{з)} \frac{21}{16}x^2 + \frac{17}{16}x - \frac{1}{2} < 0.$$

33 Решите квадратные неравенства:

а) $\left(\frac{1}{5} + 3x\right)\left(\frac{9}{2} + 9x\right) > -10$;

в) $\left(-\frac{3}{2} - \frac{3x}{4}\right)\left(8x + \frac{8}{5}\right) \leq 8$;

б) $\left(\frac{3}{7} + \frac{3x}{5}\right)\left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{2}\right) \leq -5$;

г) $\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{3x}{2} - 2\right) > 10$.

34 Решите неравенства:

а) $\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{3}\right)\left(\frac{5x}{2} - \frac{9}{2}\right) \geq -3x\left(10x - \frac{3}{4}\right)$;

б) $(-1-x)\left(\frac{10}{9} - \frac{7x}{10}\right) > \frac{5}{3}\left(-\frac{7}{3} - \frac{x}{2}\right)$;

в) $\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{3} - 7x\right) + \left(-\frac{9}{8} - 4x\right)\left(\frac{5}{4} + \frac{9x}{2}\right) \leq \left(\frac{5}{2} - \frac{2x}{5}\right)\left(\frac{1}{10} + \frac{x}{2}\right)$;

г) $\left(\frac{5}{3} - \frac{5x}{6}\right)\left(4 + \frac{3x}{2}\right) + \left(\frac{5}{8} + 4x\right)(5x-1) \leq \frac{2}{5}(10-3x) + \frac{5x}{2}\left(\frac{7x}{6} - \frac{7}{8}\right)$.

35 При каких значениях h неравенство

$$(x-h)(x+2h) + (x+h)(x-2h) > hx^2 - 17$$

справедливо при всех действительных x ?

36 При каких значениях s неравенство

$$(s-1)x^2 + (5s-5)x + (s+1) \leq 0$$

справедливо при единственном действительном значении x ?

37 Решите квадратные неравенства методом интервалов:

а) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{223}{280}x + \frac{9}{7} \geq 0$;

д) $\frac{111x}{40} - \frac{3}{80} - 45x^2 \geq 0$;

б) $\frac{9}{20}x^2 + \frac{33}{35}x - \frac{27}{49} \leq 0$;

е) $24x^2 + 36x + \frac{81}{8} \leq 0$;

в) $36x^2 - 4 - 7x < 0$;

ж) $35x^2 - \frac{221}{5}x + \frac{24}{5} < 0$;

г) $2 + 7x - 30x^2 > 0$;

з) $3x^2 - 36 - 3x > 0$.

38 Сведя неравенства к квадратным, решите их методом интервалов:

а) $\left(\frac{1}{3} - \frac{9x}{7}\right)\left(\frac{4x}{9} - \frac{3}{4}\right) > 6$;

в) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{2x}{3}\right)\left(1 + \frac{8x}{3}\right) \leq -5$;

б) $\left(\frac{9x}{4} - \frac{4}{5}\right)\left(10x - \frac{1}{2}\right) \geq -2$;

г) $(-5 - 2x)\left(\frac{3}{2} - x\right) < -8$.

39 Решите неравенство:

а) $\left(\frac{27}{4} + \frac{137}{28}x - \frac{4}{21}x^2\right)\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{20}x - \frac{1}{16}x^2\right) > 0;$

б) $\left(-\frac{5}{9} + \frac{25}{9}x + 20x^2\right)\left(\frac{5}{6} + \frac{79}{6}x + 21x^2\right) \leq 0;$

в) $\left(15x^2 - 4x + \frac{4}{15}\right)\left(16x^2 + 3x - \frac{1}{4}\right) \geq 0.$

40 Решите неравенство:

а) $-3(3x-10)^6(7+6x)^7(5+7x)^3 < 0;$

б) $(-10-8x)(1-6x)^7(x-8)^4(9+x)^6(6+6x) \geq 0;$

в) $(-4-5x)^2(-8-3x)^7(2+4x)^4(7x-8)^6(3+10x)^6 > 0;$

г) $(-7-5x)^7(-8-2x)^2(8-x)^6(2x-8)^7(1+6x)^7 \leq 0.$

41 Решите неравенство:

а) $(5+8x)(18+34x+16x^2) < 0;$

в) $(3+8x)(30-41x-15x^2) \leq 0;$

б) $(6-10x)(100-140x+40x^2) \leq 0;$

г) $(10-x)(64-80x+16x^2) \leq 0.$

42 Решите неравенство:

а) $-3x^2 - 17x^3 - 10x^4 \geq 0;$

в) $-27x^3 + 72x^4 + 27x^5 \leq 0;$

б) $90x^4 - 125x^5 + 40x^6 < 0;$

г) $-25x^3 + 50x^4 - 9x^5 \geq 0.$

43 Решите неравенство:

а) $100x^7 - 36x^3 \geq 0;$

в) $\frac{53}{2}x^7 - 7x^5 - 7x^9 \leq 0;$

б) $x^6 + \frac{31}{2}x^8 + 27x^{10} \geq 0;$

г) $80x^{10} - \frac{25}{2}x^8 > 0$

44 Решите неравенство:

а) $\left(-\frac{4}{5} + \frac{64}{15}x + 20x^2\right)\left(\frac{7}{18} + \frac{197}{30}x + 21x^2\right) > 0;$

б) $(9x-63x^2)(16+56x-32x^2) \leq 0;$

в) $(24-42x+18x^2)(-50-10x+40x^2) > 0;$

г) $(-6+31x-40x^2)(-72-49x+36x^2) \geq 0.$

45 Решите неравенство:

а) $\frac{9}{7}x^4 - \frac{4}{7}x^2 + \frac{7}{2} > 0;$

в) $\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 8 \geq 0;$

б) $-\frac{2}{9}x^4 + x^2 - \frac{4}{9} < 0;$

г) $-\frac{10}{9}x^4 + 3x^2 - \frac{1}{2} \leq 0.$

46 Решите неравенство:

а) $\frac{9+x}{-6+4x} < 0;$

д) $\frac{9-8x}{-3-5x} \geq 0;$

б) $\frac{8}{4-10x} < 0;$

е) $\frac{-10-5x}{-8+x} > 0;$

в) $\frac{8+2x}{4+x} \leq 0;$

ж) $\frac{-6-9x}{9+8x} < 0;$

г) $\frac{-9+9x}{6-10x} < 0;$

з) $\frac{-4-7x}{8-4x} > 0.$

47 Решите неравенство:

а) $\frac{-5-x}{10-4x-6x^2} \geq 0;$

в) $\frac{-54+48x+32x^2}{-10+9x} > 0;$

б) $\frac{6-8x}{-16+12x+18x^2} \geq 0;$

г) $\frac{15x^2-15x}{4+10x} < 0.$

48 Решите неравенство:

а) $\frac{-6-8x}{-5-10x} \geq -4;$

в) $\frac{5+6x}{3x} \geq 3;$

б) $\frac{-1-5x}{-6+2x} \leq 10;$

г) $\frac{-3-8x}{6+9x} > -3.$

49 Решите неравенство:

а) $\frac{-8-8x}{7-5x} \leq \frac{9}{5+5x};$

в) $\frac{-10-6x}{-7-8x} \leq \frac{-5+7x}{-10-4x};$

б) $-\frac{7}{-1+4x} < \frac{-2+10x}{10-5x};$

г) $\frac{1+7x}{8-4x} \geq \frac{4+5x}{5-2x};$

д) $\frac{-3+6x}{-2+6x} \geq \frac{7+4x}{10-3x};$

ж) $\frac{-2+2x}{-2-10x} \geq \frac{-7-10x}{3-2x};$

е) $\frac{-10+2x}{6+8x} \geq \frac{6+9x}{9+x};$

з) $\frac{6+7x}{9x} < \frac{4-9x}{4-4x}.$

50 Решите неравенство:

а) $\frac{-30-14x+8x^2}{15+16x-7x^2} > \frac{-30-60x}{-30-75x-30x^2};$

б) $\frac{7+74x+40x^2}{28-40x-32x^2} \geq \frac{5+42x+16x^2}{10+79x-8x^2};$

$$\text{в)} \frac{12+43x+35x^2}{-8+26x+45x^2} \leq \frac{-20x-50x^2}{-30x-5x^2};$$

$$\text{г)} \frac{-30+63x-27x^2}{-10-14x+12x^2} \geq \frac{-42-29x+5x^2}{21-17x+2x^2}.$$

51 Решите неравенство:

$$\text{а)} \frac{(10+2x)^6(-2+10x)}{(2-9x)(5+10x)^4} > 0;$$

$$\text{б)} \frac{(-10-8x)^6(-1-6x)^5(-1+x)^4}{(6-2x)^2(5+4x)^5(3+7x)^5} \geq 0;$$

$$\text{в)} \frac{(7-5x)^4(-2+3x)^6(2+4x)^5(10+5x)}{(4-2x)^3(7+x)^6(-2+8x)(-4+9x)^5} \leq 0;$$

$$\text{г)} \frac{(8-9x)(6-5x)^6(-7-4x)^4(-2+3x)^2(-10+10x)^4}{(-4-10x)^4(-4-7x)^3(2-7x)^6(-8-3x)^6(4-x)^6} > 0.$$

52 Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 10-8x \geq 0, \\ 5-5x \leq 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 6-3x \leq 0, \\ -6+10x \leq 0; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} 5+6x \leq 0, \\ 5+x \geq 0; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 2-9x \geq 0, \\ -9+9x \leq 0. \end{cases}$$

53 Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} -4-9x > 9+9x, \\ -9-x < 3+3x; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} -2-6x < 9+4x, \\ -6-8x \leq -4+7x; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 10-4x > -2-10x, \\ 10-4x \leq 1; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} -6+3x \geq 5+10x, \\ -8-x > -4-x; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2+5x > -5-x, \\ -6+3x \geq -6+6x; \end{cases} \quad \text{ж)} \begin{cases} 4-4x > 9+8x, \\ 3+x > 10-5x; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 7 \leq -5+7x, \\ -x < 4-x; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} -9-9x > -1-x, \\ 6-6x < 10-6x. \end{cases}$$

54 Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} -6+7x-x^2 \leq 0, \\ -5-x > 0; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} -24-18x+81x^2 \leq 0, \\ -7+2x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2-13x+20x^2 < 0, \\ 7-7x > 0; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} -15-17x+18x^2 < 0, \\ 3-10x \leq 0. \end{cases}$$

55 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 16 + 36x + 20x^2 < 0, \\ 3 + 5x \leq 3 - 2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 16 + 30x - 54x^2 > 0, \\ 7 \geq -3 - 6x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 27 - 27x + 6x^2 \geq 0, \\ -3 - 2x < 4 - 7x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 24x - 6x^2 \geq 0, \\ 7 + 5x \geq -6 + 8x. \end{cases}$

56 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -80 + 32x < 0, \\ -80 - 48x + 32x^2 \leq 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 35 + 103x + 72x^2 \leq 0, \\ 6 + 29x + 20x^2 \geq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7 - 18x + 8x^2 > 0, \\ 72 - 42x + 6x^2 \geq 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 60 + 88x + 32x^2 \geq 0, \\ -10 - 39x - 35x^2 \leq 0. \end{cases}$

57 Решите двойное неравенство:

а) $0 < -2 + 2x < 4;$

б) $1 - 4x < 3 - 4x \leq 2 - 2x;$

в) $-2 \leq -30 - 74x - 36x^2 < 20;$

г) $-3 < -6 - 5x \leq 6;$

д) $8 + 5x < -7 + 3x < -1 + x;$

е) $-28 \leq 6 - 5x + x^2 < 20.$

58 Решите совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} 9 - 3x < 0, \\ 4 - 5x < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3 - 6x > 0, \\ -7 - 9x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 - 8x > 0, \\ 4 + 9x \leq 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3 + 6x < 0, \\ -5 + 3x \leq 0. \end{cases}$

59 Решите совокупность неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 18 + 22x - 28x^2 < 0, \\ -1 - 2x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 12 + 67x + 90x^2 \leq 0, \\ -8 - 3x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -56 - 23x - 2x^2 \leq 0, \\ -7 + 4x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} -18 + 22x - 4x^2 > 0, \\ 4 + 7x \leq 0. \end{cases}$$

60 Решите совокупность неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} -8 - 10x + 7x^2 \leq 0, \\ -5 - 20x + 25x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -9 + 27x - 8x^2 \geq 0, \\ -4 + 16x - 12x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -8x - 28x^2 > 0, \\ 32 - 24x - 36x^2 < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 18 - 72x - 90x^2 \geq 0, \\ -7 + 37x - 10x^2 \geq 0. \end{cases}$$

61 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} -2 + 9x \leq -7 + 9x, \\ -7 + 2x \geq 7 - 2x, \\ 1 + 9x > 6x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -1 - 7x < 5, \\ 2 + 5x \geq 3 - 4x, \\ -7 + 3x \geq 3 - 3x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -3 + 3x > -6 + 2x, \\ 4 - 7x < 1 + 6x, \\ -1 - 4x \geq -2 - 6x; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} -2 + 5x > -5 - 7x, \\ -7 + 10x \leq -1 + 9x, \\ 6 + 5x \geq -5 + 5x. \end{cases}$$

62 Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{-3+x}{5-7x} \geq -4+10x, \\ \frac{7-6x}{4+10x} > 8+6x, \\ \frac{8+8x}{-9+4x} > 2-10x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{(5-6x)(-7+4x)}{10(-2-10x)} > 0, \\ \frac{(-3-x)(4+8x)(6+8x)}{(5-2x)(-8+4x)(-5+5x)} \geq 0; \end{cases}$$

$$в) \left\{ \begin{array}{l} \frac{30+29x-7x^2}{9-6x-48x^2} \leq 0, \\ \frac{14-55x-36x^2}{-36-118x-70x^2} < 0; \end{array} \right.$$

$$г) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-4+7x}{1+9x} < \frac{-6+7x}{-4+6x}, \\ \frac{2-8x}{-9+2x} \geq \frac{-5-7x}{-8+3x}, \\ \frac{1}{2}(-8-7x) \leq \frac{-9-6x}{-10-7x}; \end{array} \right.$$

$$д) \left\{ \begin{array}{l} \frac{7-23x+18x^2}{50+125x+72x^2} < 0, \\ \frac{50+50x-28x^2}{-18+68x-42x^2} \leq 0; \end{array} \right.$$

$$е) \left\{ \begin{array}{l} \frac{24+43x+5x^2}{1+2x-3x^2} < 0, \\ \frac{54-51x-14x^2}{9+3x} < 0, \\ \frac{100+60x-27x^2}{5+33x+18x^2} > 0; \end{array} \right.$$

$$ж) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-48-60x-12x^2}{64+40x+6x^2} \geq \frac{-4+7x+15x^2}{-8-34x-30x^2}, \\ \frac{35-115x+90x^2}{-14+39x-27x^2} \geq \frac{-8+73x-9x^2}{-80-30x+5x^2}, \\ \frac{-40+74x-30x^2}{100-10x-30x^2} > \frac{-48x+12x^2}{-24+38x-8x^2}; \end{array} \right.$$

$$з) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-36+6x+72x^2}{-36-78x-40x^2} \geq \frac{-49+91x-40x^2}{-35+54x-16x^2}, \\ \frac{4-14x-60x^2}{5-21x-54x^2} < \frac{-8+64x}{32+64x}, \\ \frac{(3-4x)(-5+2x)(-9+4x)(-9+9x)}{(4-9x)(5-9x)(-4-7x)(-7+2x)} < 0; \end{array} \right.$$

$$\text{и) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-2-4x)(-10+x)^5(-4+6x)^3(10+8x)}{(-5-9x)^5(-6-4x)^3(-2+4x)^3(1+7x)^2} > 0, \\ \frac{(7-4x)^5(-6-3x)(-6+6x)^5(-10+9x)^4}{(-8-10x)^2(-6-2x)^3(-9+5x)^4(-1+10x)^2} \leq 0, \\ \frac{(-9-7x)^4(4-2x)^5(10+4x)^3}{(4+2x)^3(3+4x)(-10+7x)^4(10+8x)^4} < 0, \\ \frac{(-3-3x)x^4(-7+2x)^2}{5+4x} \geq 0. \end{array} \right.$$

- 63** Найдите все значения p , при которых множеством решений неравенства $(p^2 - 3p - 10)x^2 - (p - 1)x + 7p - 1 \geq 0$ является интервал $x \in [3; +\infty)$.
- 64** Найдите все значения a , при которых множеством решений неравенства $\frac{x - 2a}{x - a + 1} < 0$ является интервал длиной 3.
- 65** Найдите все значения m , при которых множеством решений неравенства $x^2 + (m - 3)x - (6m^2 + 9m) \leq 0$ является интервал длиной 5.
- 66** Найдите все значения n , при которых любое решение неравенства $x^2 + 6x + n^2 + n - 1 \leq 0$ меньше любого решения неравенства $x^2 - 4x - 5 < 0$.
- 67** Найдите все значения q , при которых любое решение неравенства $(q^3 - q)^2 x^2 - qx - 7q^2 + 2 > 0$ меньше любого решения неравенства $3x^2 + 4x - 4 < 0$.
- 68** Найдите все значения s , при которых любое решение неравенства $sx^2 + (s - 1)x - 1 > 0$ меньше любого решения неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$.
- 69** Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$; $f(1) > -1$; $f(3) < -4$. Определите знак коэффициента a .

1 Сколько решений имеет уравнение:

а) $2x^2 + y^2 + 1 = 0$;

в) $(x - 4y)^2 + y^2 = 0$;

б) $x^2 + 2x + y^2 - 2y + 3 = 0$;

г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$?

2 Постройте график уравнения:

а) $(x - 1)^2 + y^2 = 0$;

в) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$;

б) $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5 = 0$;

г) $x^2 + x + y + y^2 = 0$.

3 Постройте график уравнения:

а) $\frac{2x+1}{y-1} = 1$;

в) $\frac{2x+y+5}{y-1} = 1$;

б) $\frac{2x+y}{y-1} = 2$;

г) $\frac{2x+y+5}{x+y} = 1$.

4 При каком значении a график данного уравнения проходит через точку $(-2; 1)$?

а) $x^2 + y = a$;

в) $x^2 + y^2 = a$;

б) $xy = a$;

г) $\frac{x^2 - 1}{y - 1} = a$.

5 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = |x - 5|, \\ y = (x - 5)^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |y| = |x|, \\ xy = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |y| = |x|, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

6 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ xy = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ x^2 - xy = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases}$

7 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 3, \\ y^2 - xy = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 8 \\ y^2 - 2xy = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 16, \\ y^2 - xy = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$

8 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{6}{x-y} - \frac{8}{x+y} = -2, \\ \frac{9}{x-y} + \frac{10}{x+y} = 8; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{9}{x-y} + \frac{2}{x+y} = 3, \\ \frac{18}{x-y} - \frac{5}{x+y} = -3; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{12}{x+y} = 3, \\ \frac{8}{x-y} - \frac{18}{x+y} = -1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{1}{x-y} - \frac{5}{x+y} = 2, \\ \frac{3}{x-y} + \frac{5}{x+y} = 2. \end{cases} \end{array}$$

9 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{3x+y}{x-1} - \frac{x-y}{2y} = 2, \\ x-y=4; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{2y+3}{x+2} - \frac{x+y}{x-2} = \frac{12}{4-x^2}, \\ 2x-y=3; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{x-y}{y-1} + \frac{x+5}{y+1} = \frac{4}{y^2-1}, \\ x-y=4; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-3} = \frac{2}{3x-x^2}, \\ 2x+y=3. \end{cases} \end{array}$$

10 График уравнения $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $(1; 7)$ и $(-1; 1)$. Найдите p и q .

11 График уравнения $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ проходит через точку $(1; 3)$. Найдите a .

12 Произведение двух положительных чисел в 3 раза больше их суммы, а сумма квадратов равна 160. Найдите эти числа.

13 Произведение двух положительных чисел равно 10, и их сумма составляет 70% произведения. Найдите эти числа.

14 Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения цифр.

15 Два экскаватора, работая совместно, могут вырыть котлован за 48 часов. За какое время каждый из них может вырыть котлован, если первому нужно для этого на 40 часов больше, чем второму?

16 Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к данному числу прибавить 18, то получится число с теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

- 17 По окружности, длина которой 96 м, движутся в одном направлении два тела. Через каждые 4 с тела встречаются. Найдите скорости тел, если известно, что одно из них проходит окружность на 2 с быстрее другого.
- 18 От причала отправились одновременно катер и плот. Пройдя 120 км по течению реки со скоростью 25 км/ч, катер развернулся, поплыл обратно и встретил плот через 8 часов после начала своего движения. Определите скорость течения реки.
- 19 Два поезда выезжают из A в B одновременно навстречу друг другу. Первый поезд приезжает в B через 27 часов, а второй через 12 часов после встречи. Через какое время каждый из них прибыл в путь назначения?
- 20 Один из катетов прямоугольного треугольника на 17 см больше другого. Если больший катет увеличить на 7 см, а другой уменьшить на 11 см, то гипотенуза треугольника не изменится. Как изменится площадь треугольника?
- 21 Составьте задачу, которая может быть решена с помощью данной системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

- 22 Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того как первый проработал 2 часа, его сменил второй, который за 3 часа закончил всю работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 часа быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?
- 23 На берегу озера расположены пункты A и B . Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Ещё через 1 час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу?
- 24 Таня и Миша отправились в 9 часов утра с одинаковыми скоростями по одному маршруту из пункта A в пункт B . Сначала они ехали на велосипедах, затем в разное время пересели на автобусы, при этом скорости передвижения увеличились в пять раз. Известно, что Миша проехал на автобусе и на велосипеде одинаковое расстояние. Таня ехала на автобусе и на велосипеде одинаковое время. Когда Таня приехала в пункт B , если Миша приехал туда на 40 минут позже?

- 25 На факультете A отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете B — 20%, а на факультете C — лишь 4%. Найдите средний процент отличников по всем трём факультетам, если известно, что на факультете B учится на 50% больше студентов, чем на факультете A , а на факультете C — вдвое меньше, чем на факультете A .
- 26 По данным опроса учеников школы, 47,7% всех детей любят кошек, 15,1% — не любят, а оставшиеся 37,2% детей относятся к ним равнодушно. Аналогичная статистика для мальчиков такова: 33%, 20% и 47%. Сколько процентов девочек из этой школы не любят кошек, если 63% их любят?
- 27 Заполнение бассейна начинают через малую трубу. В некоторый момент малую трубу закрывают, открывают большую трубу, производительность которой в 4 раза выше, и заполнение завершают через неё. Если малую трубу закрывают после заполнения половины бассейна, то для заполнения всего бассейна требуется на 20 минут больше, чем в случае, когда малая и большая трубы открыты одинаковое время. Сколько времени требуется для заполнения бассейна в обоих случаях?
- 28 Из пункта A в пункт B с постоянной скоростью двигалась колонна машин. На половине пути у одной из машин случилась поломка, на устранение которой потребовалась $\frac{1}{12}$ часть времени, за которое колонна проходит весь путь. Во сколько раз нужно увеличить скорость отставшей машины, чтобы она въехала в пункт B одновременно с колонной?
- 29 Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на вокзал. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 минут. Если же он поедет на автобусе со скоростью 40 км/ч, то приедет на 2 часа раньше. Чему равно расстояние от лагеря до станции?
- 30 Двое рабочих изготовили 316 деталей, причём вторым сделано на 4 детали меньше, чем первым. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день он изготавливал на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?
- 31 Теплоход шёл по реке и поравнялся с плотом, а через час — с лодкой, плывшими по реке в противоположном теплоходу направлении. Через какое время после момента встречи с теплоходом лодка догонит плот, если она движется по реке вдвое быстрее него, но в три раза медленнее теплохода?

- 1 Докажите, что последовательность, заданная формулой
а) $a_n = \frac{3n-1}{5n+4}$, возрастает; б) $a_n = \frac{1-3n}{2n+3}$, убывает.
- 2 Найдите наибольший член последовательности:
а) $a_n = 4 + 14n - 3n^2$; б) $a_n = 3 + 15n - n^2$.
- 3 Третий и четвёртый член арифметической прогрессии равны соответственно 4 и 8. Найдите первый член прогрессии.
- 4 Могут ли данные числа быть членами (не обязательно соседними) одной и той же арифметической прогрессии?
а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$; б) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.
- 5 Арифметическая прогрессия состоит из четырёх членов. Сумма первых трёх членов равна 24, а сумма трёх последних равна 33. Найдите первый член прогрессии.
- 6 В арифметической прогрессии $a_1 = 100$, a_{22} её первый отрицательный член. Какие значения может принимать разность прогрессии?
- 7 В арифметической прогрессии $a_1 = -2,9$, $a_2 = -2,6$. Укажите номер наименьшего по абсолютной величине члена прогрессии.
- 8 Сумма первого и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 2, а сумма их квадратов равна 20. Найдите сумму квадратов четырёх первых членов прогрессии.
- 9 Четвёртый член арифметической прогрессии равен 18. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.
- 10 Решите уравнение $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155$.
- 11 Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии в 5 раз меньше суммы следующих восьми членов. Найдите отношение суммы первых восьми членов прогрессии к сумме четырёх её первых членов.
- 12 Может ли арифметическая прогрессия содержать ровно три отрицательных члена?
- 13 Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7, но не кратных 5.

- 14 Каких трёхзначных чисел больше: кратных 7, но не кратных 11 или кратных 11, но не кратных 7?
- 15 Может ли геометрическая прогрессия содержать ровно три отрицательных члена?
- 16 Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии, состоящей из трёх чисел, если третий член прогрессии равен 36, а сумма всех её членов равна 52.
- 17 Вычислите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если разность между вторым и первым членом прогрессии равна 3, а сумма первых трёх членов равна 21.
- 18 Три числа образуют геометрическую прогрессию. Известно, что сумма этих чисел равна 19, а сумма квадратов равна 133. Найдите эти числа.
- 19 При каком условии три положительных числа a , b и c будут одновременно соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой арифметической и некоторой геометрической прогрессий?
- 20 Могут ли числа 2, 3 и 5 быть членами (не обязательно соседними) одной и той же геометрической прогрессии?
- 21 Разность второго и первого членов геометрической прогрессии равна -3 , а разность третьего и второго равна -6 . Найдите суммы пяти первых членов прогрессии.
- 22 Три числа, первое из которых равно 8, составляют арифметическую прогрессию. Если среднее число уменьшить на 3, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.
- 23 Найдите четыре числа, если известно, что первые три из них составляют арифметическую прогрессию, а последние три геометрическую прогрессию, причём сумма двух средних чисел равна 30, а сумма двух крайних 33.
- 24 Запишите бесконечную периодическую десятичную дробь в виде несократимой обыкновенной дроби:
 а) $0,2(3)$; б) $0,2(19)$; в) $0,5(6)$; г) $0,1(45)$.
- 25 Проверьте, является ли геометрической прогрессией последовательность, сумма n первых членов которой задаётся формулой:
 а) $a_n = 3^n - 1$; в) $a_n = 3^n + 2^n$;
 б) $a_n = 4^n - 1$; г) $a_n = 3^n - 2^n$?

- 26** Докажите, что разности соседних членов непостоянной геометрической прогрессии сами составляют геометрическую прогрессию. Как связаны между собой знаменатели этих прогрессий?
- 27** Сумма первых 7 членов геометрической прогрессии равна её первому члену, умноженному на 7, а сумма первого, восьмого и пятнадцатого членов равна 15. Найти сумму первых 21 членов этой прогрессии.
- 28** Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4 . Известно, что сумма шестых членов прогрессий равна -724 . Найти сумму пятых членов прогрессий.
- 29** При каких a четыре корня уравнения
- $$x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$$
- являются последовательными членами арифметической прогрессии?
- 30** В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвёртого членов равна третьему члену, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.
- 31** Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $u_n = \frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед u_n , к сумме членов, стоящих после u_n , равно 6. Найдите n , если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.
- 32** Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них умножить на 2, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии при условии, что его абсолютная величина меньше единицы.
- 33** Внутренние углы выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120° , образуют арифметическую прогрессию с разностью 5° . Чему равно число сторон многоугольника?

К параграфу 1.1

2. а) 52; в) -104; е) 0; з) -16.

3. а), г).

4. а) $1 + (x-3)^2$; в) $17 + (2+x)^2$; е) $9 + \frac{1}{4}(x-4)^2$; з) $-32 + 9\left(\frac{2}{3} + x\right)^2$.

5. а) $-1 + \frac{81}{20}\left(\frac{25}{36} + x\right)^2$; в) $-7 - \frac{243}{32}\left(x - \frac{8}{27}\right)^2$;

е) $-9 - \frac{20}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$; з) $-3 - \frac{1}{2}\left(\frac{20}{9} + x\right)^2$.

6. а) $(x-1)(x+6)$; в) $(x-4)^2$; е) $(x-1)(x+10)$; з) $(x-3)(x+5)$.

7. а) $\frac{1}{4}(x-3)(4x+5)$; в) $\frac{1}{5}(x-1)(5x-4)$; е) $\frac{1}{3}(x-1)(3x-1)$; з) $\frac{1}{2}(x-1)(2x-5)$.

8. а) $-\frac{1}{6}(x-18)(x+1)$; в) $\frac{2}{3}(x+1)(3x+1)$; е) $\frac{1}{70}(5x-8)(9x-7)$;

з) $\frac{1}{840}(7x+15)(27x-56)$.

9. а) $x = -\frac{5}{4}$; $x = \frac{1}{3}$; б) $x = -30$; $x = \frac{18}{5}$; в) $x = -1$; $x = \frac{7}{72}$; г) $x = -\frac{7}{3}$; $x = \frac{1}{3}$.

10. а) $(x-4)(x-3)$; в) $(x-9)(x-3)$; е) $-\frac{1}{24}(3x+2)(8x-15)$; з) $3(3x-4)(3x+2)$.

11. а) $x = \frac{-7 - \sqrt{69}}{2}$; $x = \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}$; б) $x = \frac{2}{3}(-2 - \sqrt{10})$; $x = \frac{2}{3}(-2 + \sqrt{10})$;

в) $x = 2 - \sqrt{10}$; $x = 2 + \sqrt{10}$; г) $x = \frac{63 - \sqrt{4353}}{12}$; $x = \frac{63 + \sqrt{4353}}{12}$.

12. а) нет; б) да; в) нет; г) нет.

13. а) $\frac{5(2+x)}{2(4+x)}$; в) $\frac{3+x}{4x-3}$; е) $\frac{10-4x}{10+7x}$; з) $\frac{6+4x}{2+3x}$.

14. а) $\frac{6(a-v)}{10a+7v}$; в) $-\frac{3g+4l}{4g+6l}$; е) $\frac{5u+3x}{8u+6x}$; з) $\frac{7c+g}{c+3g}$.

15. а) $x = -\frac{5}{4}$; $x = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{13}{2}}$; б) $x = -\sqrt{\frac{21}{2}}$; $x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; в) $x = 2$; $x = -\sqrt{7}$;

г) $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $x = \sqrt{\frac{11}{2}}$.

16. При $u \neq 0$.

17. При $v < 0$ $x_1 = \frac{1}{2v} - \frac{\sqrt{-v}}{|v|}$; $x_2 = \frac{1}{2v} + \frac{\sqrt{-v}}{|v|}$.

18. а) $-\frac{13}{7}$; б) $-\frac{13}{34}$; в) $\frac{3510}{833}$; г) $-\frac{99541}{11662}$; д) $\frac{34}{7}$; е) $\frac{331538488}{405769}$; ж) $\frac{59319}{56644}$; з) $-\frac{34}{49}$.

19. $a = 7$; $b = -10$; $c = -12$. 356; 465; 588.

20. Не имеет. Имеет 2 корня. Имеет 1 корень. $-\frac{D}{4a}$ при $x = -\frac{b}{2a}$.

21. График второй функции — прямая линия. График первой функции — та же прямая линия, но с выколотой точкой (2; 1).

22. График второй функции — прямая линия. График первой функции — та же прямая линия, но с выколотыми точками (3; 7) и (5; 9).

23. $-\frac{b}{c}$.

К параграфу 1.2

6. а) 294; в) $\frac{675}{2}$; е) 216; з) $\frac{867}{2}$.

7. а) 6; в) $\frac{1}{150}$; е) $\frac{200}{3}$; з) $\frac{216}{25}$.

8. б), в), д).

9. а) -4 ; в) a — любое число; е) 10; з) 0,0189.

10. а) $y(u) < y(v)$; б) $y(u) > y(v)$; в) $y(u) < y(v)$; г) $y(u) < y(v)$.

11. а) $y(u) < y(v)$; б) $y(u) > y(v)$; в) $y(u) > y(v)$; г) $y(u) < y(v)$.

12. а) $y(u) > y(v)$; б) $y(u) < y(v)$; в) $y(u) < y(v)$; г) $y(u) > y(v)$.

15. $f(u) = g(u)$, если $u = 0$ и $f(u) < g(u)$ для всех остальных u .

16. а) $f(u) \geq g(u)$; б) $f(u) \geq g(u)$; в) $f(u) \geq g(u)$; г) $f(u) \leq g(u)$; д) $f(u) \leq g(u)$;

е) $f(u) \leq g(u)$. В неравенствах равенство достигается только при $u = 0$.

17. Сравните $y(|u|)$ и $y(|v|)$.

К параграфу 1.3

6. а) 0; в) 0; е) $-\frac{3}{2}$; з) $\frac{45}{2}$.
7. б), в), е), ж).
8. а) $(0; -7)$, вверх; б) $(3; 0)$, вниз; в) $(-11; -11)$, вверх; г) $(-1; 2)$, вверх; д) $(-3; -7)$, вниз; е) $(0; -\sqrt{2})$, вверх; ж) $\left(1, 12; \frac{7}{4}\right)$, вниз; з) $(-71; -11)$, вверх.
9. а) Отражение относительно оси Ox ;
 б) параллельный перенос на вектор $\vec{m}(0, 6)$;
 в) параллельный перенос на вектор $\vec{m}(-2, 0)$; г) параллельный перенос на вектор $\vec{m}(1, -4)$.
10. а) $y = -5x^2 + 2$; б) $y = -5x^2 - 2$; в) $y = -5(x - 2)^2$; г) $y = -5(x + 2)^2$.
11. а) $y = 2(x - 1)^2 + 3$; б) $y = 2(x + 4)^2 - 7$; в) $y = 2(x + 3)^2 + 2$;
 г) $y = 2(x - 0,5)^2 - 3,5$.
12. Парабола $y = x^2$, перенесённая параллельным переносом на вектор:
 а) $\vec{m}(0, -1)$; б) $\vec{m}(1, 0)$. Отражённая относительно оси Ox парабола $y = x^2$, перенесённая параллельным переносом на вектор: в) $\vec{m}(0, -1)$; г) $\vec{m}(1, 0)$;
 д) $\vec{m}(0, 1)$; е) $\vec{m}(-1, 0)$.
17. График функции $y = \sqrt{x}$, перенесённый параллельным переносом на вектор:
 а) $\vec{m}(0, 3)$; б) $\vec{m}(0, -1)$; в) $\vec{m}(-4, 0)$; г) $\vec{m}(1, 0)$.
18. Гипербола $y = \frac{1}{x}$, перенесённая параллельным переносом на вектор:
 а) $\vec{m}(0, 4)$; б) $\vec{m}(0, -3)$; в) $\vec{m}(-1, 0)$; г) $\vec{m}(2, 0)$.

К параграфу 1.4

6. а) $(3; -8)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{19}{2}\right)$; е) $\left(\frac{5}{8}; \frac{89}{8}\right)$; з) $\left(-\frac{7}{6}; -\frac{13}{12}\right)$.
7. а) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{17}{8}\right)$, вверх; в) $\left(\frac{1}{5}; -\frac{121}{180}\right)$, вниз; е) $\left(-\frac{12}{19}; -\frac{97}{95}\right)$, вверх; з) $\left(\frac{3}{2}; \frac{77}{8}\right)$, вниз.
8. а) $(0; 0)$, $(4; 0)$; в) $(0; 42)$, $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $(7; 0)$; е) $\left(0; \frac{49}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$, $(14; 0)$; з) $(0; -1)$, $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

9. а) $(0; 0)$; б) $(1; 0)$; д) $(1; 0)$; е) $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$; ж) $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$; з) $\left(-\frac{9}{4}; 0\right)$.

10. а) $a = -2; b = 0; c = 2$; б) $a = -2; b = 0; c = -2$; в) $a = -2; b = 8; c = -8$;
г) $a = -2; b = -8; c = -8$.

11. а) $a = \frac{1}{2}; b = -1; c = \frac{7}{2}$; б) $a = \frac{1}{2}; b = -2; c = 0$; в) $a = \frac{1}{2}; b = 5; c = \frac{23}{2}$;
г) $a = \frac{1}{2}; b = \frac{11}{5}; c = \frac{88}{25}$.

12. Парабола: а) $-(x-1)^2 + 1$; б) $(x+2)^2$; в) $4(x+1)^2$; г) $2(x-3)^2$; ж) $(x-3)^2 - 4$;
з) $-(x+1)^2 - 2$.

13. Парабола: а) $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$; б) $2\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - 1$; е) $-3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$; з) $-\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 2$.

14. Парабола: а) $(x-2)^2 - 4$; в) $-(x+1)^2 + 16$; е) $(x-3)^2 - 1$; з) $-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$.

16. а) Наименьшее значение 3; б) наибольшее значение 16; в) наибольшее значение -3 ; г) наибольшее значение -1 ; д) наименьшее значение 1; е) наименьшее значение -4 ; ж) наименьшее значение 3; з) наибольшее значение 5.

17. а) Наименьшее значение $-\frac{25}{8}$ при $x = -\frac{1}{4}$; в) наименьшее значение $\frac{5}{4}$ при $x = \frac{4}{3}$;
е) наибольшее значение -1 при $x = 2$; з) наибольшее значение $\frac{1}{4}$ при $x = -\frac{3}{5}$.

18. Одну, две или не иметь вовсе.

19. Одну, две или не иметь вовсе.

20. $p = -\frac{25}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}; -\frac{215}{16}\right)$.

21. Область состоит из точек $p < 0$ и $p < 4q$, причём $q \neq 0$ и $q \neq 1$.

22. $a = 54, b = 27, 4374$.

23. $a = \frac{KN}{K+M}, b = \frac{MN}{K+M}, \frac{KMN^2}{K+M}$.

25. I — $a > 0, b > 0, c > 0, D < 0$; II — $a > 0, b < 0, c > 0, D > 0$; III — $a < 0, b > 0, c < 0, D > 0$; IV — $a < 0, b < 0, c < 0, D = 0$; V — $a < 0, b < 0, c = 0, D > 0$; VI — $a > 0, b < 0, c > 0, D > 0$.

27. а) $b_1 > b_2$; б) $b_1 > b_2$.

29. Уравнение параболы имеет вид:

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3,$$

откуда:

$$a = \frac{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)},$$

$$b = \frac{x_1^2(y_2 - y_3) + x_2^2(y_3 - y_1) + x_3^2(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)},$$

$$c = \frac{x_2x_3y_1(x_2 - x_3) + x_1x_3y_2(x_3 - x_1) + x_1x_2y_3(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

30. График — парабола $y = (x-a)^2 + b$ с выколотыми точками $(-1, (1+a)^2 + b)$ и $(1, (1-a)^2 + b)$. Наименьшее значение равно b , достигается при $x = a$, если $a \neq 1, a \neq -1$. При $a = 1$ и $a = -1$ наименьшего значения нет.

К параграфу 2.1

8. а) $-\frac{7}{6} < -\frac{136}{169}$; в) $-\frac{85}{133} > -\frac{145}{154}$; е) $-\frac{19}{78} < -\frac{36}{173}$; з) $-\frac{2}{7} > -\frac{152}{93}$.

9. а) $-\frac{177}{14} > -12,69$; в) $\frac{196}{135} > 1,4$; е) $-\frac{49}{15} > -3,358$; з) $\frac{49}{31} > 1,49$.

10. а) $0,13; \frac{22}{147}; 0,184; \frac{4}{19}$; в) $0,444; \frac{53}{104}; \frac{29}{31}; 0,94$.

12. а) $\sqrt{\frac{127}{31}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{181}{2}}$; в) $\sqrt{\frac{118}{179}} > 2\sqrt{\frac{21}{167}}$; е) $\sqrt{\frac{113}{103}} < \frac{5}{2\sqrt{2}}$; з) $\sqrt{\frac{145}{3}} > \sqrt{\frac{82}{31}}$.

13. б), в).

14. б) $\frac{17}{16} > \frac{18}{19}$; в) $\frac{47}{24} < \frac{55}{27}$.

15. $\frac{99}{70} \cdot \sqrt{2} - \frac{99}{70} \approx 0,000072152$.

16. а) $>$; б) $>$; в) $>$; г) $>$.

17. а) $=$; б) $=$; в) $>$; г) $=$.

18. а) $>$; б) $>$; в) $<$; г) $<$.

К параграфу 2.2

7. а) $1 < 5$; б) $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3,1$; г) $\sqrt{5} + \sqrt{6} > 4,67$.
8. а) $10 < 18$; б) $1 < 10$; в) $\sqrt{42} > 6,24$; г) $1 > 0,99$.
9. а) $11,4 \leq P \leq 11,8$; б) $7,56 \leq S \leq 8,14$.
10. $231 \text{ см}^3 \leq V \leq 384 \text{ см}^3$, а) $262 \text{ см}^2 \leq S \leq 352 \text{ см}^2$.
11. а) $3 < x + y < 5$; $0 < x - y < 2$; $2 < xy < 6$; $1 < \frac{x}{y} < 3$;
в) $20 < x + y < 120$; $-90 < x - y < 10$; $100 < xy < 2000$; $\frac{1}{10} < \frac{x}{y} < 2$.
12. а) $6,1 < \sqrt{14} + \sqrt{6} < 6,3$; б) $1,2 < \sqrt{14} - \sqrt{6} < 1,4$.
13. а) $4 < x + 2y < 11$; б) $-23 < 4x - 3y < -5$; в) $0 < \frac{x}{2} + \frac{y}{3} < \frac{13}{6}$; г) $-\frac{1}{2} < \frac{y}{2} - 2x < \frac{13}{2}$.
15. а), г).
19. В первый.

К параграфу 2.3

10. в), г), ж), з).
11. г), д), е), ж), з).
12. а), б), в), г), ж), з).
13. а) $-4; -3; -2$; в) $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$; е) $2; 3$; з) $0; 1; 2; 3; 4$.
14. а) -1 ; в) 4 ; е) 2 ; з) -6 .
15. а) -4 ; в) -1 ; е) 221 ; з) -1 .
16. а) $[2; 4]$; в) $(0; 0,5)$; е) $\emptyset$; з) $(-\infty; -5)$.
17. а) $(1; 5)$; в) $(-3; 7]$; е) $[-\sqrt{13}; +\infty)$; з) $(-1; +\infty)$.
18. а) $(-4; 4]$; в) $(6; 7)$.
19. а) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-20; +\infty)$.
21. а) Наибольшее 0 , наименьшее -3 ; б) наибольшего нет, наименьшее 3 ;
в) наибольшее 17 , наименьшего нет; г) наибольшего и наименьшего чисел нет; д) наибольшее $\sqrt{17}$, наименьшего нет; е) наибольшего и наименьшего чисел нет; ж) наибольшего нет, наименьшее -15 ; з) наибольшего и наименьшего чисел нет.
22. Существуют.
23. Верно.
24. а) Верно; б) верно.
25. Верно.

К параграфу 2.4

5. б), в), г), з).

6. а), б), в), г), д), е).

7. а) $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right]$; в) $\left[-\frac{1}{7}; +\infty\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$; з) $(2; +\infty)$.

8. а) $(-9; +\infty)$; в) $(-\infty; 2]$; е) $[1; +\infty)$; з) $\left(-\frac{11}{5}; +\infty\right)$.

9. а) $\left(-\infty; \frac{7}{2}\right]$; в) $\left(-\infty; -\frac{35}{3}\right)$; е) $\left[-\frac{19}{8}; +\infty\right)$; з) $\left(-\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

10. а) $\left(-\infty; \frac{13}{3}\right)$; в) $\left[-\frac{21}{13}; +\infty\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{16}{9}\right]$; з) $(-\infty; 16)$.

11. а) $\left(-\infty; \frac{11}{10}\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{11}{31}\right]$; е) $\left(-\frac{12}{7}; +\infty\right)$; з) $\left(-\infty; \frac{8}{39}\right]$.

12. а) $\left(\frac{17}{6}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{326}{113}\right]$; е) $\left(-\infty; \frac{52}{3}\right)$; з) $\emptyset$.

13. а) $\left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{53}{12}\right)$; в) $[-1; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left(\frac{31}{6}; +\infty\right)$; е) $\emptyset$;
ж) $(-\infty; 3]$; з) $(-\infty; -9]$.

14. а) $a < -1$; б) $b < -\frac{1}{5}$; в) $c \geq 1$; г) $m \leq \frac{14}{5}$; д) $n \geq -\frac{5}{7}$.

15. а) $a < 17$; б) $b > \frac{1}{8}$; в) ни при каких; г) при всех;

д) $n \in \left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$.

16. а) -1 ; б) -1 ; в) 14 ; г) -10 .

17. а) 5 ; б) 6 ; в) 1 ; г) -1 .

18. а) $a < \frac{41}{61}$; б) $b \pm 2$; в) ни при каких; г) $d \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

19. а) $a \geq 3$; б) $z \geq \frac{4}{9}$; в) $p \geq 0$; г) $w \geq \frac{5}{9}$; д) $m \leq 0$; е) $w \leq \frac{16}{63}$; ж) $c \leq -\frac{1}{5}$; з) $m \geq -\frac{5}{4}$.

20. а) $x \geq 6$; б) $x \geq 3$; в) $x \leq -\frac{4}{7}$; г) $x \geq -\frac{10}{3}$; д) $x \leq \frac{2}{3}$; е) $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$; ж) $x \geq \frac{2}{\sqrt{7}}$;

з) $x \leq -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

22. а) $x < -\frac{2}{3}$; б) $g < \frac{5}{7}$.

23. а) $x < \frac{1}{2}$; б) $x < 0,5$.

24. а) $x \leq 0,85$; б) $x \leq \frac{1}{8}$.

25. а) $x \leq -\frac{13}{4}$; б) $t \geq -\frac{3}{16}$.

26. а) $x \geq 2$; б) $x \leq -4$.

27. а) $a > \frac{1}{4}$; б) $a > -\frac{32}{7}$.

28. а) $c < -\frac{2}{5}$; б) $b < \frac{65}{37}$.

К параграфу 2.5

5. а) $x = 0$; б) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; з) $(-\infty; -11) \cup (11; +\infty)$.

6. а) $0 \leq x \leq 2$; б) $-2 < x < 6$; е) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

7. а) $\emptyset$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [9; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; з) $-\frac{5}{7} < x < 2$.

8. а) $\frac{-10 - \sqrt{70}}{15} \leq x \leq \frac{-10 + \sqrt{70}}{15}$; б) $\emptyset$; е) $-\frac{27}{32} \leq x \leq \frac{1}{4}$; з) $-\frac{5}{12} < x < \frac{3}{64}$.

9. а) $-7 < x < 5$; б) $-\frac{7}{2} < x < \frac{353}{35}$; е) $\frac{7 - \sqrt{109}}{10} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{109}}{10}$; з) $\emptyset$.

10. а) $0 \leq x \leq 85$; б) $-5 < x < \frac{155}{72}$; в) $\left(-\infty; -\frac{22700}{1127}\right) \cup (20; +\infty)$; г) $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{9}{2}$;

д) $-\frac{7767}{2176} \leq x \leq \frac{7}{5}$; е) $\left(-\infty; -\frac{71}{60}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$; ж) $\frac{19}{30} < x < \frac{11}{2}$; з) $\emptyset$.

11. а) $3 < x < 4$; б) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; в) $-5 \leq x \leq 0$; г) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup \left[\frac{12}{5}; +\infty\right)$.

12. а) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $x = -\frac{2}{3}$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; +\infty)$.

15. а) $(-\infty; -4] \cup [-1; 1] \cup [4; +\infty)$; б) $-9 \leq x \leq 9$.

17. а) $h = 9$; б) $h = \frac{6}{5}$; $h = -\frac{6}{5}$; в) $h = \frac{1}{2}$; г) ни при каких.

18. а) $s > 4$; б) $-6 \leq s \leq 6$; в) ни при каких; г) ни при каких.

К параграфу 2.6

5. а) $0 \leq x \leq 2$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$; г) $-4 < x < 5$.
6. а) $\emptyset$; б) $\left(-\infty; -\frac{21}{2}\right] \cup [9; +\infty)$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; +\infty)$.
7. а) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $\frac{49-\sqrt{511}}{21} < x < \frac{49+\sqrt{511}}{21}$; г) $-12 \leq x \leq 2$.
8. а) $(-\infty; -7) \cup (6; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right] \cup [7; +\infty)$; в) $0 \leq x \leq \frac{622}{35}$; г) $\emptyset$;
 д) $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{23}{12}\right] \cup [4; +\infty)$; г) $(-\infty; -30] \cup [85; +\infty)$;
 з) $\frac{-263-\sqrt{28129}}{100} < x < \frac{-263+\sqrt{28129}}{100}$.
10. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.
11. а) $x > 3$; б) $x < -\frac{4}{3}$; в) $x \geq \frac{7}{2}$; г) $x \geq -\sqrt{2}$.

К параграфу 2.7

4. а) $[-1; 2] \cup [4; +\infty)$; б) $(-\infty; -5] \cup [0; 7]$; в) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -6) \cup (1; 9)$.
5. а) $\{2\} \cup [9; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (2; 6)$; в) $(-6; 1) \cup (9; +\infty)$; г) $(-\infty; -1] \cup [1; 7]$.
6. а) $[-3; 2] \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; -8] \cup [-1; 9]$; в) $(-5; 2) \cup (8; +\infty)$; г) $(-\infty; -9) \cup (0; 8)$.
7. а) $x \leq 2$; б) $(-\infty; 0) \cup (0; 9) \cup (10; +\infty)$; в) $(-\infty; 0] \cup [3; 20]$; г) $(-\infty; -16) \cup (0; 5)$.
8. а) $x \geq -2$; б) $x > 3$; в) $(-\sqrt{10}; 0) \cup (2; \sqrt{10})$; г) $-5 \leq x \leq 0$.
9. а) $\{1\} \cup [2; 3]$; б) $(-6; -4) \cup (1; 6)$; в) $(-\infty; -9) \cup (-5; 1) \cup (1; +\infty)$;
 г) $(-\infty; -11] \cup [-5; +\infty)$.
10. а) $[-2; -1] \cup [1; 2]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; +\infty\right)$; г) $-\sqrt{\frac{5}{6}} < x < \sqrt{\frac{5}{6}}$.
11. а) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $-\frac{6}{17} < x \leq \frac{15}{2}$; в) $-\frac{13}{17} < x < \frac{9}{10}$; г) $x > 1$.

$$12. \text{ а) } (-3; -1) \cup (2; +\infty); \text{ в) } (-\infty; -7] \cup \left(-\frac{3}{5}; 1\right]; \text{ е) } (-\infty; -4) \cup \left(-1; \frac{3}{5}\right]; \\ \text{ з) } \left(-10; -\frac{2}{9}\right) \cup (8; +\infty).$$

$$13. \text{ а) } (-\infty; -1) \cup \{2\}; \text{ в) } x > \frac{5}{3}; \text{ е) } \left(-\frac{1}{3}; 10\right) \cup (10; +\infty); \text{ з) } x > -\frac{1}{6}.$$

$$14. \text{ а) } (-\infty; -1) \cup (6; +\infty); \text{ в) } \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right); \text{ е) } \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{8}{7}; +\infty\right); \\ \text{ з) } \left(-\infty; -\frac{37}{21}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

$$15. \text{ а) } (-\infty; -2) \cup (-1; 3); \text{ в) } (-\infty; -6] \cup \left(-\frac{6}{7}; \frac{2}{9}\right]; \text{ е) } (-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{7}; 3\right); \\ \text{ з) } \left(\frac{5-\sqrt{35}}{5}; 2\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{35}}{5}; +\infty\right).$$

$$16. \text{ а) } \left(-2; -\frac{13}{8}\right) \cup (-1; +\infty); \text{ в) } (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{9}{17}; +\infty\right); \text{ е) } \left(-\infty; -\frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right); \\ \text{ з) } \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup [4; +\infty).$$

$$17. \text{ а) } \left(-\infty; -\frac{11}{12}\right) \cup \left(-\frac{61}{72}; +\infty\right); \text{ б) } -2 < x < \frac{15}{13}; \text{ в) } (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{18}{5}\right] \cup (4; +\infty); \\ \text{ г) } \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{6}; +\infty\right); \text{ д) } -\frac{5}{4} < x < \frac{14}{11}; \text{ е) } -\frac{9}{13} < x < 0; \text{ ж) } x > \frac{11}{15}; \\ \text{ з) } \left(-\frac{8}{7}; \frac{-37-2\sqrt{386}}{70}\right) \cup \left[\frac{-37+2\sqrt{386}}{70}; \frac{3}{5}\right).$$

$$18. \text{ а) } -8 < x < -\frac{5}{2}; \text{ б) } \left(-\frac{9}{4}; -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right); \\ \text{ в) } (-\infty; -3) \cup \left[-3; -\frac{8}{5}\right] \cup \left[-\frac{4}{5}; -\frac{4}{9}\right) \cup \left(-\frac{4}{9}; +\infty\right); \\ \text{ г) } (-\infty; -6) \cup \left(-6; -\frac{5}{2}\right) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{4}{9}; +\infty\right); \\ \text{ д) } \left(-\infty; -\frac{7}{10}\right) \cup \left(-\frac{7}{10}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 3\right) \cup (7; +\infty);$$

$$\text{е)} (-\infty; -2) \cup \left(-1; -\frac{8}{9}\right) \cup \left(-\frac{8}{9}; -\frac{3}{7}\right) \cup \left(-\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{10}\right);$$

$$\text{ж)} \left(-\infty; -\frac{6}{7}\right) \cup \left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{10}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 4\right);$$

$$\text{з)} \left(-\infty; -\frac{9}{5}\right) \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \left[\frac{6}{5}; 7\right) \cup (7; +\infty).$$

$$19. \text{ а)} \{-4\}; \text{ б)} \left(-\infty; \frac{-35 - \sqrt{265}}{40}\right) \cup \left(\frac{-35 + \sqrt{265}}{40}; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right);$$

$$\text{в)} (-\infty; 1) \cup (1; +\infty); \text{ г)} \frac{3}{4} < x < 1.$$

$$20. \text{ а)} (-\infty; -1) \cup (-1; 2); \text{ б)} \left[-2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(-1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup (1; +\infty);$$

$$\text{в)} (-\infty; -1) \cup \left[\frac{2}{5}; 2\right];$$

$$\text{г)} (-2; -1) \cup \left(\frac{7}{9}; +\infty\right).$$

$$21. \text{ а)} (-3; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right]; \text{ б)} \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right); \text{ в)} \frac{2}{3} < x < 1;$$

$$\text{г)} \left[-\frac{9}{4}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$22. \text{ а)} \emptyset; \text{ б)} \{-4; -2\}; \text{ в)} (-\infty; -2] \cup \left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 0\right) \cup (0; 1] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right);$$

$$\text{г)} \left(-\sqrt{2}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 0) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

$$23. \text{ а)} (-\infty; -7) \cup (-6; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty); \text{ б)} (-1; 0) \cup (1; 2);$$

$$\text{в)} (-4; -3) \cup [-2; 0] \cup (1; 2); \text{ г)} \left(-1; \frac{-3 - \sqrt{33}}{12}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{12} < x < \frac{1}{2}\right).$$

К параграфу 2.8

$$4. \text{ а)} -\frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{2}; \text{ в)} \emptyset; \text{ е)} x \geq -1; \text{ з)} -\frac{3}{4} \leq x \leq 1.$$

$$5. \text{ а)} -8 \leq x < \frac{1}{6}; \text{ в)} x \leq -1; \text{ е)} x \leq \frac{2}{3}; \text{ з)} x \geq \frac{1}{2}.$$

$$7. \text{ а) } (-\infty; -1] \cup \{5\}; \text{ в) } x \leq -\frac{11}{3}; \text{ е) } (-\infty; -8] \cup \left[-\frac{5}{3}; 0\right]; \text{ з) } -\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{3}{5}.$$

$$8. \text{ а) } x = 3; \text{ в) } \emptyset; \text{ е) } \frac{1}{2} \leq x < \frac{9}{10}; \text{ з) } \left[-1; -\frac{5}{7}\right] \cup \left[-\frac{5}{9}; -\frac{2}{7}\right].$$

$$9. \text{ а) } 3 < x \leq 6; \text{ в) } -\frac{1}{4} \leq x < 0; \text{ е) } x = -\frac{1}{2}; \text{ з) } -2 < x < \frac{1}{2}.$$

$$10. \text{ а) } x > 6; \text{ в) } -\frac{9}{5} \leq x \leq -\frac{1}{3}.$$

$$11. \text{ а) } [-4; -3] \cup [3; 4]; \text{ в) } \emptyset.$$

$$12. \text{ а) } (-\infty; -2) \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right); \text{ в) } x < 0; \text{ е) } (-\infty; +\infty); \text{ з) } x < 2.$$

$$13. \text{ а) } (-3 - \sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}) \cup [2; +\infty); \text{ в) } \left[-\frac{1}{4}; 0\right] \cup \left(\frac{2}{9}; +\infty\right).$$

$$14. \text{ а) } -4 < x \leq -1; \text{ в) } (-\infty; +\infty).$$

$$15. \text{ а) } \frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}; \text{ в) } 0 \leq x < \frac{6}{7}.$$

$$16. \text{ а) } 1 \leq x < 3; \text{ в) } -\frac{15}{8} \leq x < -\frac{5}{4}; \text{ е) } \frac{5}{4} < x \leq 2; \text{ з) } \emptyset.$$

17. Валя прав.

$$18. \text{ а) } \left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]; \text{ б) } \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{9}; \frac{3}{7}\right) \cup (3; +\infty); \text{ в) } -\frac{8}{9} < x < 0;$$

$$\text{ г) } (-\infty; -4] \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right).$$

$$19. \text{ а) } \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{37}{17}\right]; \text{ б) } \left[\frac{3 - \sqrt{1049}}{20}; -\frac{4}{3}\right]; \text{ в) } x > 3; \text{ г) } \emptyset.$$

$$20. \text{ а) } \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup \left(-\frac{4}{9}; -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; \frac{8}{9}\right) \cup (2; 4); \text{ б) } \emptyset; \text{ в) } \left(4; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right);$$

$$\text{ г) } \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right).$$

$$21. \text{ а) } \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{10}\right); \text{ б) } \left[-\frac{4}{5}; -\frac{2}{9}\right]; \text{ в) } \left(-\frac{9}{7}; -\frac{6}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; 4\right]; \text{ г) } \left(-\frac{1}{2}; \frac{63 - \sqrt{8029}}{70}\right) \cup \{8\}.$$

К параграфу 3.1

4. а) $(4; 3)$, $(-4; -3)$; в) $(0; 0)$, $(4; -2)$; е) $(3; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$; з) $(-1; 2)$; $(2; -1)$.

5. а) 2 решения; в) 4 решения.

6. а) $(1; 1)$, $(-7; 7)$; в) $(3; -2)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

7. а) 2 решения; в) 2 решения.

8. а) $(2; 8)$; б) $(-1; -1)$; $\left(\frac{2-2\sqrt{13}}{4}; 5-2\sqrt{13}\right)$; $\left(\frac{2+2\sqrt{13}}{4}; 5+2\sqrt{13}\right)$.

9. а) $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(-3; -4)$, $(-4; -3)$; б) $(-3; 4)$; $(0; -5)$; $(3; 4)$.

10. а) $a = \frac{1}{2}$; б) $a = \pm\sqrt{2}$.

К параграфу 3.2

1. а) $(0; 1)$; $(1; -2)$; в) $(1; 5)$; е) $(9; -4)$; $(9; 4)$; з) $(1; -\sqrt{7})$; $(1; \sqrt{7})$.

2. а) $(1; -3)$; $(5; 1)$; в) $(2; 3)$; $(3; 2)$; е) $(0; 2)$; $(4; -2)$; з) $(-4; -3)$; $(6; 2)$.

3. а) $(1; 1)$; $(-1-\sqrt{3}; 2)$; $(-1+\sqrt{3}; 2)$; в) $(-1; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$; $(1; 1)$; е) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$; з) $(-1; -1)$.

4. а) $(0; 1)$; $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$; в) $(-5; -3)$; $(1; 3)$; е) $(1; 3)$; з) $(-1; 4)$; $(4; -1)$.

5. а) $\left(\frac{7}{5}; -\frac{16}{5}\right)$; б) $(2; 5)$; в) $(2; 1)$; г) $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

6. а) $(2; 2)$; б) $(1; 0)$; в) $(5; 4)$; г) $(4; 0)$.

7. а) $(2; 2)$; б) $(-1; -3)$; $(3; 1)$; в) $(-5; -2)$; $(5; 2)$; г) $(-20; -4)$; $(20; 4)$.

8. а) $(-21; 28)$; $(4; 3)$; б) $(4; 5)$; $(5; 4)$; в) $(-4; -2)$; $(4; 2)$; г) $(-3; 2)$; $(3; -2)$.

9. а) $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\right)$; б) $(1; 2)$; $(2; 1)$; в) $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$; $(4; 1)$; г) $(1; 5)$; $(2; 3)$; $(3; 2)$; $(5; 1)$.

10. а) $(1; 1)$; $\left(\frac{20}{3}; -\frac{8}{9}\right)$; б) $\left(-\frac{29}{18}; \frac{5}{6}\right)$; $(0; -4)$; в) $\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right)$; $(1; 1)$; г) $(1; -3)$; $\left(\frac{16}{7}; -\frac{12}{7}\right)$.

11. а) $(-2; -3)$; $(2; 3)$; б) $(-4; -3)$; $(4; 3)$; в) $(2; 3)$; $(4; 5)$; г) $(-2; 5)$; $(2; 1)$.

12. а) $(-2; -1); (-2; 1); (-1; -2); (-1; 2); (1; -2); (1; 2); (2; -1); (2; 1);$
 б) $(-3; -1); (-3; 1); (-1; -3); (-1; 3); (1; -3); (1; 3); (3; -1); (3; 1);$ в) $\emptyset;$
 г) $\left(-\frac{17}{8}; -\frac{15}{8}\right); \left(-\frac{17}{8}; \frac{15}{8}\right); \left(\frac{17}{8}; -\frac{15}{8}\right); \left(\frac{17}{8}; \frac{15}{8}\right).$

К параграфу 3.3

1. 12 и 7.
 3. 24 и 6.
 5. 8 см и 6 см.
 7. 12 и 11.
 9. 53.
 11. 4 км/ч и 5 км/ч.
 13. 45 км/ч и 25 км/ч.
 15. 6 ч и 12 ч.
 17. 24 км/ч и 18 км/ч.

К параграфу 4.1

4. а) 13; в) 32.
 5. а) $a_n = 2n$; в) $a_n = 3n + 2$; е) $a_n = 11n - 14$; з) $a_n = \frac{n}{n+1}$.
 6. а) 16; в) 36.
 7. а) 83; в) 60.
 9. а) да, $n = 12$; в) да, $n = 7$.
 10. а) $\frac{k+2}{k}$; в) $\frac{k+4}{k}$.
 11. а) $a_{10} = 100$; в) такого нет.
 12. а) 3; в) 1 и 2.
 13. а) $k^2 - 1$; в) $4k^2 - 4k$.
 14. а) $x_n = \frac{1}{2^n}$; в) $y_n = \frac{1}{n^2 + n}$.
 15. а) $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2$; в) $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k$.
 16. $a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k + 1$.
 18. а) $y_2 = -56$.

К параграфу 4.2

4. а) -2 ; в) -4 ; е) $\frac{5}{6}$; з) $-\frac{5}{6}$.
5. а) $11, 16, 21$; в) $-3, 0, 3$; е) $3, 4, 6, 6, 2$; з) $-4, 4, -7, 8, -10, 4$.
6. а) 6 ; в) 17 ; е) $-10, 5$; з) $-21, 5$.
7. а) да; в) нет; е) нет; з) нет.
8. а) 58 ; в) $-3, 5$; е) $6\frac{2}{3}$; з) -83 .
9. а) $a_n = 6n - 5$; в) $a_n = 4 - 2n$; е) $a_n = 2, 5n - 6$; з) $a_n = 0, 6 - 2, 8n$.
10. а) $a_n = 4n - 2$; в) $a_n = 8 - 2n$; е) $a_n = 4n - 3$; з) $a_n = 25n - 32$.
11. а) 13 ; в) 31 .
12. а) $a_n = 4n - 3$; в) $a_{n-5} = 4n - 23$.
13. а) $d > 0$.
14. а) $n \leq 4$.
15. а) 10 ; в) 74 .
16. а) 5 ; в) ни при каких.
17. а) 20 и 32 ; в) $14, 20, 26$ и 32 .
19. 15 .
20. $\frac{a+b}{2}$.
21. Могут.
22. 15 .
23. $53, 9$ м.
24. 5 .

К параграфу 4.3

2. а) 14 ; в) 28 .
3. а) 242 ; в) -96 .
4. а) $\frac{(3n-5)n}{2}$; в) $(3-n)n$ и 6 ; е) $\frac{(19-n)n}{10}$; з) $-\frac{(7+3n)n}{5}$.
5. а) $S_n = n^2$; в) $S_n = 2n(n+1)$; е) $\frac{(2-n)n}{3}$; з) $a_n = \frac{(7-3n)n}{4}$.
6. а) $a_1 = 19$; $d = -2$; в) $a_1 = 5$; $d = 2$; е) $a_1 = -7$; $d = 4$; з) $a_1 = 6$; $d = -4$.

7. а) $\frac{n(n+1)}{2}$; в) n^2 .
 8. 15.
 9. 80.
 10. 56.
 11. 5.
 12. 343 539.
 15. $a_1 = 2, d = 3$ или $a_1 = 8, d = -3$.
 16. 176,4 м.

К параграфу 4.4

4. а) 3; в) -3 ; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.
 5. а) 2; в) 1458; е) 972; з) 324.
 6. а) 32; в) 60,75; е) $-10\frac{2}{3}$; з) $-\frac{1}{16}$.
 7. а) 112; в) 135.
 8. а) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$; в) $a_n = (-1)^{n-1}$; е) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$; з) $a_n = -16 \cdot 8^{n-1}$.
 9. а) ± 6 ; в) -1 ; 2; е) $\pm \frac{1}{2}$; з) не существует.
 10. Пример: $x_1 = 16, q = \frac{1}{2}$.
 11. а) ± 27 ; в) $\pm 6\sqrt{6}$.
 12. 60 и 90.
 13. 15; 45 и 135 или -15 ; 45 и -135 .
 14. 972.
 16. а) $\frac{1}{q}$; в) $\frac{1}{q^2}$.
 18. Да, например, если $b_1 = q$.
 20. $\pm\sqrt{pr}$
 21. Могут. Если q — знаменатель, то $1+q^2 = q^4$ или $1-q^2 = q^4$.
 22. При $1+q = q^2$.
 23. а) $b_1 > 0, q > 1$ или $b_1 < 0, 0 < q < 1$.

К параграфу 4.5

2. а) 3; в) 39; е) 27; з) 324.

3. а) 10,5; в) 11; е) -7600; з) 5.

4. а) $\frac{1-(-2)^n}{3}$; в) $\frac{1-(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-4}}$; е) $1-(-1)^n$; з) $3 \cdot \frac{1-(-3)^n}{5 \cdot 2^{n-2}}$.

5. а) $\frac{3^{n+1}-3}{2}$; в) $\frac{2^n-1}{2^n}$.

6. а) $q=2, S_4=60$; в) $q=\frac{1}{2}, S_4=480$.

9. 5.

11. в) $(a+1)(a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1)$.

12. 255 или 765.

13. -42.

14. 3280.

15. 252 или 28.

К параграфу 4.6

3. а) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{2}$; е) 4; з) $2-\sqrt{2}$.

4. а) $6\frac{2}{3}$; в) -4,5; е) $1\frac{1}{3}$; з) 0,3.

5. а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{4}{33}$; е) $\frac{7}{33}$; з) $\frac{10}{11}$; и) $\frac{7}{30}$; л) $\frac{19}{90}$.

6. а) да; в) нет.

8. 4.

9. а) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{2}{3}$.

10. а) $\frac{1}{1-x}$; в) $\frac{1}{1-x^2}$.

11. а) $\frac{191}{30}$; в) $\frac{4067}{810}$.

Содержание

Как работать с учебником	3
------------------------------------	---

Глава I. Квадратичная функция

1.1. Квадратный трёхчлен	8
1.2. Функция $y = ax^2$ и её график	15
1.3. Функция $y = a(x + h)^2 + l$ и её график	26
1.4. Построение графика квадратичной функции	34

Глава II. Неравенства и системы неравенств

2.1. Сравнение чисел	46
2.2. Числовые неравенства и их свойства	52
2.3. Числовые промежутки	59
2.4. Неравенства с одним неизвестным	66
2.5. Решение квадратных неравенств графическим методом	76
2.6. Решение квадратных неравенств методом интервалов	86
2.7. Решение рациональных неравенств методом интервалов	92
2.8. Решение систем и совокупностей неравенств	105

Глава III. Системы уравнений

3.1. Графический метод решения систем уравнений	116
3.2. Решение систем уравнений методом подстановки	120
3.3. Решение задач с помощью систем уравнений	127

Глава IV. Последовательности и прогрессии

4.1. Последовательности. Способы задания последовательностей	132
4.2. Арифметическая прогрессия. Формула n -го члена арифметической прогрессии	136
4.3. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	142
4.4. Геометрическая прогрессия	147
4.5. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	153
4.6. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	159

Задания для повторения

К главе I. Квадратичная функция	165
К главе II. Неравенства и системы неравенств	170
К главе III. Системы уравнений	182
К главе IV. Последовательности и прогрессии	186

Отвѣты

К параграфу 1.1	189
К параграфу 1.2	190
К параграфу 1.3	191
К параграфу 1.4	191
К параграфу 2.1	193
К параграфу 2.2	194
К параграфу 2.3	194
К параграфу 2.4	195
К параграфу 2.5	196
К параграфу 2.6	197
К параграфу 2.7	197
К параграфу 2.8	199
К параграфу 3.1	201
К параграфу 3.2	201
К параграфу 3.3	202
К параграфу 4.1	202
К параграфу 4.2	203
К параграфу 4.3	203
К параграфу 4.4	204
К параграфу 4.5	205
К параграфу 4.6	205

Рубин Александр Григорьевич, **Чулков** Павел Викторович

АЛГЕБРА

9 класс

Концепция оформления и художественное редактирование — *Е.Д. Ковалевская*

Подписано в печать 23.05.15. Формат 70×90/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Гарнитура Журнальная. Объём 13 п. л. Тираж 4 000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс». 109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1

Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»

Телефоны для справок: (495) 368-70-54, 672-23-12, 672-23-34

<http://www.school2100.ru> E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»

ОАО «Издательство “Высшая школа”»

214020 Смоленск, ул. Смольянинова, 1